Universität Dortmund

Fachbereich Statistik

Diplomarbeit

Die verallgemeinerte Lognormalverteilung

Stefanie Christina Scheid

Betreuer: Prof. Dr. Walter Krämer

Dortmund im November 2001

Inhaltsverzeichnis

Symbole und Definitionen **3**

1 Einleitung **5**

2 Die Spezialfälle **7**

2.1 Die Lognormalverteilung 7

2.2 Die Log-Laplace-Verteilung 11

3 Die verallgemeinerte Lognormalverteilung **16**

3.1 Theoretische Herleitung 16

3.2 Dichte- und Verteilungsfunktion 18

3.3 Eigenschaften der Dichte 23

3.4 Momente und Verteilungsparameter 26

3.5 Hazardrate 28

3.6 Entropie 29

4 Lorenzkurve und Ungleichheitsmessung **32**

4.1 Lorenzkurve und Lorenzordnung 32

4.2 Ungleichheitsmaße 35

5 Schätzen und Testen der Parameter **41**

5.1 Momentenmethode 42

5.2 Maximum-Likelihood-Methode 44

5.3 Likelihood-Quotienten-Test 48

5.4 Informationsmatrix 49

5.5 Score-Test 55

6 Anwendung der Verfahren **57**

6.1 Parameterschätzung 58

6.2 Güte der Anpassung 61

6.3 Testen des Parameters r 66

7 Zusammenfassung **68**

Literaturverzeichnis **70**

A Herleitungen **73**

A.1 p-tes Moment μ_p 74

A.2 Entropie H 75

A.3 Modifizierter Theilkoeffizient T_1^{med} 76

A.4 Modifizierter Theilkoeffizient T_1^{mod} 77

A.5 Theilkoeffizient T_1 78

A.6 Zweiter Theilkoeffizient T_2 79

A.7 Ableitungen der Gammafunktion 80

A.8 Informationsmatrix mit Schwellenwert 81

B Tafel der verallgemeinerten Standardnormalverteilung **85**

C Anpassungen an die EVS-Daten **87**

D Verwendete SAS-Programme **91**

Symbole und Definitionen

α_3	Schiefekoeffizient einer Verteilung: $\alpha_3 := \bar{\mu}_3/\bar{\mu}_2^{3/2}$.
α_4	Wölbungskoeffizient einer Verteilung: $\alpha_4 := \bar{\mu}_4/\bar{\mu}_2^2$.
$\Gamma(\cdot)$	Gammafunktion mit den Eigenschaften: $\Gamma(x) := \int_0^\infty exp\{-t\}t^{x-1}\,\mathrm{d}t$ für $x > 0$, $\Gamma(x+1) = x\,\Gamma(x)$, $\Gamma(x)\,\Gamma(1-x) = \pi/\sin(\pi x)$ für $x \neq 0, \pm1, \pm2, \ldots$, $\Gamma(n+1) = n!$ für $n = 0, 1, 2, \ldots$, $\Gamma(n+1/2) = [(2n)!\,\sqrt{\pi}\,]\,/\,[n!\,2^{2n}]$ für $n = 0, 1, 2, \ldots$, $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$.
$F(\cdot)$	Verteilungsfunktion einer Zufallsvariablen.
$F^1(\cdot)$	Verteilungsfunktion der ersten Momentenverteilung der Zufallsvariablen X : $F^1(x) := 1/\mathrm{E}[X] \int_0^x t\,f(t)\,\mathrm{d}t$.
$f(\cdot)$	Dichtefunktion einer Zufallsvariablen.
$\Lambda(\mu, \sigma^2)$	Lognormalverteilung mit den Parametern μ, σ^2.
$\Lambda_g(\theta_1, \theta_2, r)$	Verallgemeinerte Lognormalverteilung mit den Parametern θ_1, θ_2, r.
$\ln L(\vartheta; x_1, \ldots, x_n)$	Log-Likelihood-Funktion der Beobachtungen $\{x_1, \ldots, x_n\}$ der unabhängig und identisch verteilten Zufallsvariablen $(X_1, \ldots, X_n)$ mit Verteilungsfunktion abhängig vom Parametervektor ϑ, Abkürzung: $\ln L$.

μ_p	p-tes Moment der Zufallsvariablen X : $\mu_p := \mathrm{E}[X^p]$.
$\bar{\mu}_p$	p-tes Zentralmoment der Zufallsvariablen X: $\bar{\mu}_p := \mathrm{E}[(X-\mu_1)^p]$.
μ'_p	p-tes zentrales Absolutmoment der Zufallsvariablen X: $\mu'_p := \mathrm{E}[\lvert X-\mu_1\rvert^p]$.
$N(\mu,\sigma^2)$	Normalverteilung mit Erwartungswert μ und Varianz σ^2.
$N_g(\theta_1,\theta_2,r)$	Verallgemeinerte Normalverteilung mit den Parametern θ_1,θ_2,r.
$\Phi(\cdot)$	Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung.
$\Phi_r(\cdot)$	Verteilungsfunktion der verallgemeinerten Standardnormalverteilung der Ordnung r.
$\Psi(\cdot)$	Digammafunktion: $\Psi(x) := \frac{\partial}{\partial x}\ln\Gamma(x)$.
$\Psi'(\cdot)$	Trigammafunktion: $\Psi'(x) := \frac{\partial}{\partial x}\Psi(x)$.
$\mathbb{R}$	Menge der reellen Zahlen.
$\mathbb{R}^+$	Menge der positiven reellen Zahlen.
$\mathbb{R}_0^+$	Menge der positiven reellen Zahlen und 0.
$\mathrm{sign}(\cdot)$	Signumfunktion: $\mathrm{sign}(x) = \begin{cases} 1 & \text{falls } x>0 \\ 0 & \text{falls } x=0 \\ -1 & \text{falls } x<0. \end{cases}$
$\vartheta^\star$	Wahrer Wert des unbekannten Parametervektors ϑ.
$\hat{\vartheta}$	Schätzer für den unbekannten Parametervektor ϑ.
x_{med}	Median der Verteilung der Zufallsvariablen X.
x_{mod}	Modalwert der Verteilung der Zufallsvariablen X.

Kapitel 1

Einleitung

In vielen Bereichen der statistischen Anwendungen stößt man auf Daten, die zwar eingipflig, aber stark asymmetrisch verteilt sind, was die beliebte Annahme der Normalverteilung verhindert. In diesem Dilemma hat die Lognormalverteilung ihren Ursprung: Wendet man auf positive, rechtsschief verteilte Daten die natürliche Logarithmusfunktion an, so lassen die transformierten Werte häufig die Annahme der Normalverteilung zu. Daher liegt es nahe, bei den ursprünglichen Daten von einer Lognormalverteilung zu sprechen und diese näher zu charakterisieren. Durch den einfachen Transformationszusammenhang lassen sich ihre Eigenschaften in der Regel auf die Eigenschaften der Normalverteilung zurückführen.

Die Praxis zeigt jedoch, dass auch die Lognormalverteilung nicht immer angemessen ist und die Daten ungenügend anpasst. Hier stellt sich die Frage nach einer allgemeineren Variante der Lognormalverteilung, die weiterhin die Eigenschaft der positiven, eingipflig und rechtsschief verteilten Merkmalsausprägungen besitzt, die jedoch durch einen zusätzlichen Formparameter bessere Anpassungen liefert. Tatsächlich lässt sich eine solche Verallgemeinerung finden. Sie leitet sich von der verallgemeinerten Normalverteilung ab, die ebenfalls über einen zusätzlichen Parameter verfügt. Neben der einfachen Lognormalverteilung enthält die Verallgemeinerung die Log-Laplace-Verteilung als Spezialfall. Letztere ergibt sich aus der exponentiellen Transformation einer Laplace-verteilten Zufallsvariablen.

Die Eigenschaften der verallgemeinerten Lognormalverteilung lassen sich im Prinzip aus den Eigenschaften der verallgemeinerten Normalverteilung gewinnen. Über letztere existiert allerdings kaum Literatur. Daher werden die meisten Ei-

genschaften der verallgemeinerten Lognormalverteilung direkt hergeleitet. Auch die vorhandene Literatur lässt einige Fragen offen. So finden sich beispielsweise keine Quellen zur Parameterschätzung per Maximum-Likelihood-Methode.

Ich möchte mit dieser Arbeit einen Überblick geben über bereits beschriebene Charakteristika der verallgemeinerten Lognormalverteilung und diese um weitere Eigenschaften ergänzen. Daher folgt auf die kurze Beschreibung der Lognormal- und der Log-Laplace-Verteilung (Kapitel 2) die theoretische Herleitung der verallgemeinerten Lognormalverteilung sowie einige ihrer grundlegenden Eigenschaften (Kapitel 3). Da sie auch im Bereich der Ökonometrie angewandt wird, widmet sich Kapitel 4 den Lorenzkurven und der Konzentrationsmessung bei verallgemeinert lognormalverteilten Zufallsvariablen. In Kapitel 5 werden Schätzverfahren nach der Momenten- und der Maximum-Likelihood-Methode betrachtet. Da der zusätzliche Formparameter eine zentrale Rolle spielt, stellt sich im Zusammenhang mit der Parameterschätzung die Frage, ob die verallgemeinerte der einfachen Lognormalverteilung vorzuziehen wäre. Als Testverfahren werden der Likelihood-Quotienten- sowie der Score-Test vorgestellt, wobei für letzteren zunächst die Informationsmatrix bestimmt werden muss (ebenfalls in Kapitel 5). Kapitel 6 schließlich wendet die beschriebenen Schätz- und Testverfahren auf Daten aus der Einkommens- und Verbrauchsstichprobe des Statistischen Bundesamtes aus dem Jahr 1993 an.

Als Trennungszeichen der Dezimalstellen wird im Folgenden ein Punkt anstelle des Kommas benutzt, um bessere Lesbarkeit und vor allem Kontinuität in Text und Abbildung zu gewährleisten.

Kapitel 2

Die Spezialfälle

Die folgenden Abschnitte 2.1 und 2.2 widmen sich der Lognormal- und der Log-Laplace-Verteilung. Diese stellen die Spezialfälle der im Kapitel 3 hergeleiteten verallgemeinerten Lognormalverteilung dar. Gerade die Lognormalverteilung wird in der Literatur häufig erwähnt, da sie in vielen Bereichen der Anpassung und Modellierung angewandt wird. Für die Log-Laplace-Verteilung existiert kaum Literatur, ihre Eigenschaften werden durch eigene Betrachtungen ergänzt. Dieses Kapitel soll dazu dienen, die beiden Verteilungen kurz vorzustellen und ihre grundlegenden Eigenschaften zu nennen.

2.1 Die Lognormalverteilung

Die Lognormalverteilung steht in engem Zusammenhang zur Normalverteilung und ist wie folgt definiert: Wenn der natürliche Logarithmus einer Zufallsvariablen X normalverteilt ist (also $\ln X =: Y \sim N(\mu, \sigma^2)$), so heißt X lognormalverteilt ($\exp Y = X \sim \Lambda(\mu, \sigma^2)$).

Da man also eine lognormalverteilte Zufallsvariable erhält, indem die Exponentialfunktion auf eine normalverteilte Zufallsvariable angewandt wird, spricht man gelegentlich auch von der Antilognormal-Verteilung (vgl. Johnson, Kotz und Balakrishnan, 1994, S. 208).

Die Dichtefunktion f_Λ der Lognormalverteilung ergibt sich aus dem Transformationssatz für Dichten mit $y = \ln x$ aus der Dichte f_N der Normalverteilung und es gilt:

$$f_N(y) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{(y-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\} \quad \text{für } -\infty < y < \infty, \tag{2.1}$$

$$f_\Lambda(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}\,x} \exp\left\{-\dfrac{(\ln x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\} & \text{für } x > 0 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \tag{2.2}$$

Dabei gelte für die Parameter μ und σ, dass beide aus den reellen Zahlen und σ zusätzlich größer als 0 sei. Die Transformation wirkt sich auf die Bedeutung der Parameter aus: Bei der Normalverteilung ist μ ein Lage- und σ ein Skalenparameter, bei der Lognormalverteilung ist μ ein Skalen- und σ ein Formparameter.

Die Lognormalverteilung findet bei Daten mit positivem Träger Verwendung, deren eingipflige, aber asymmetrische (da rechtsschiefe) Verteilung eine zugrunde liegende Normalverteilung ausschließt. Sie eignet sich zur Beschreibung von wirtschaftlichen Größen wie zum Beispiel Einkommen, Produktpreis und Firmengröße. Auch in anderen, meist naturwissenschaftlichen Bereichen findet man Daten, die eine Lognormalverteilung vermuten lassen. Dazu zählen Disziplinen wie die Biologie und die Ökologie (zum Beispiel Wachstum oder natürliches Vorkommen bestimmter Spezies), die Geologie (Gesteinsgröße, Mineralienvorkommen oder Anzahl von Partikeleinschlüssen) sowie die Meteorologie (Größe und Konzentration in der Atmosphäre auftretender Partikel, Niederschlag und Fluthäufigkeit). Eine ausführliche Übersicht über Anwendungen in den erwähnten wissenschaftlichen Bereichen bieten Crow und Shimizu (1988).

Neben der zweiparametrigen Lognormalverteilung $\Lambda(\mu, \sigma^2)$ existiert noch eine dreiparametrige Variante $\Lambda(\mu, \sigma^2, \lambda)$. Zusätzlich zum Skalenparameter μ und zum Formparameter σ tritt der Lageparameter λ hinzu, und man spricht von einer dreiparametrig lognormalverteilten Zufallsvariablen X, wenn die Zufallsvariable $Y = \ln(X - \lambda)$ normalverteilt ist gemäß $N(\mu, \sigma^2)$. Da die Zufallsvariable X nur Werte größer als λ annehmen kann, nennt man λ auch Schwellenwert. Die zweiparametrige Version ist ein Spezialfall der dreiparametrigen (mit $\lambda = 0$). Chen (1995) diskutiert eine weitere dreiparametrige Variante, die er „Verallgemeinerte Lognormalverteilung“ nennt. Diese darf jedoch nicht verwechselt werden mit der in den nächsten Kapiteln beschriebenen Verallgemeinerung.

Die folgenden Eigenschaften sind beschränkt auf die zweiparametrige Lognormalverteilung $\Lambda(\mu, \sigma^2)$ und sind im Wesentlichen Crow und Shimizu (1988, Kapitel 1) entnommen. Das p-te Moment μ_p der Zufallsvariablen $X \sim \Lambda(\mu, \sigma^2)$ lautet:

$$\mu_p := \mathrm{E}[X^p] = \exp\left\{p\mu + \frac{1}{2}p^2\sigma^2\right\}, \tag{2.3}$$

woraus der Erwartungswert und die Varianz als zweites Zentralmoment folgen:

$$\mathrm{E}[X] = \mu_1 = \exp\left\{\mu + \frac{1}{2}\sigma^2\right\}, \tag{2.4}$$

$$Var(X) = \bar{\mu}_2 = \exp\{2\mu + \sigma^2\}(\exp\{\sigma^2\} - 1). \tag{2.5}$$

Die Verteilung wird jedoch nicht eindeutig durch die Momente bestimmt. Der Median liegt bei $\exp\mu$, was aus der logarithmischen Transformation folgt (μ ist gerade der Median der Normalverteilung). Der Modalwert liegt bei $\exp\{\mu - \sigma^2\}$. Aus der Relation „Erwartungswert > Median > Modalwert“ folgt die Rechtsschiefe der Lognormalverteilung.

Nähert sich der Wert des Parameters σ dem Wert 0, so ist die korrespondierende Zufallsvariable $X \sim \Lambda(\mu, \sigma^2)$ approximativ normalverteilt gemäß $N(\mu, \sigma^2)$. Abbildung 2.1 gibt Dichten dreier Lognormalverteilungen mit festem Skalenparameter $\mu = 0$ und verschiedenen Formparametern σ wieder. Dabei zeigt sich, dass die Dichtefunktionen mit fallendem σ an Symmetrie zunehmen. Für den Schiefekoeffizienten α_3 und den Wölbungskoeffizienten α_4 gilt mit $\omega := \exp\{\sigma^2\}$:

$$\alpha_3 = \sqrt{\omega - 1}\,(\omega + 2) \qquad \text{und} \qquad \alpha_4 = \omega^4 + 2\omega^3 + 3\omega^2 - 3. \tag{2.6}$$

Die Verteilungsfunktion der Lognormalverteilung kann zurückgeführt werden auf die Verteilungsfunktion Φ der Standardnormalverteilung. Daher gilt für die Verteilungsfunktion F der lognormalverteilten Zufallsvariablen X:

$$X \sim \Lambda(\mu, \sigma^2) \quad \Rightarrow \quad F(x) = \Phi\left(\frac{\ln x - \mu}{\sigma}\right). \tag{2.7}$$

Ebenso erhält man die Inverse der Verteilungsfunktion (und damit die Perzentilfunktion x_α) mit Hilfe der Perzentile u_α der Standardnormalverteilung:

$$F^{-1}(\alpha) := x_\alpha = \exp\{\mu + u_\alpha\sigma\} \tag{2.8}$$

(vgl. Crow und Shimizu, 1988, S. 10).

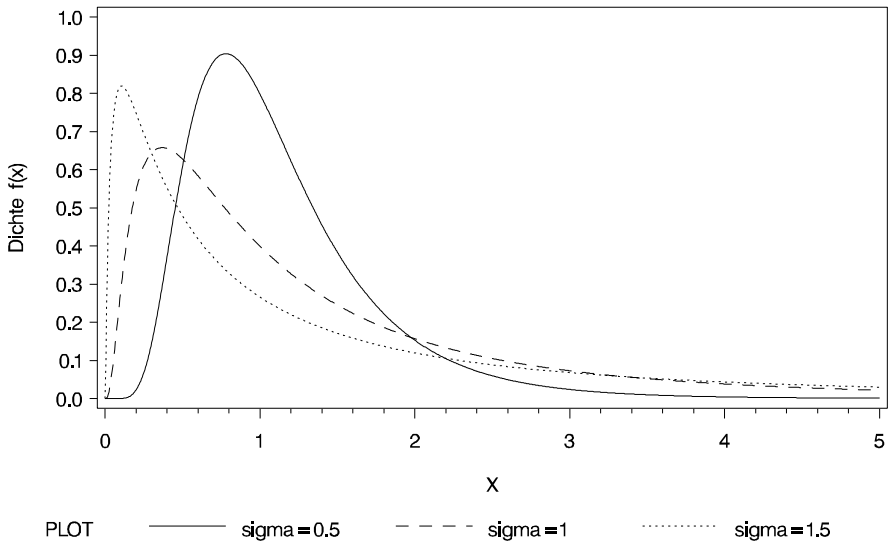

Abbildung 2.1: Dichtefunktionen der Lognormalverteilung $\Lambda(0, \sigma^2)$ für $\sigma = 0.5, 1$ und 1.5

Eine wichtige Eigenschaft der Normalverteilung ist die Stabilität unter Addition, das heißt, die Summe unabhängiger normalverteilter Zufallsvariablen ist wieder normalverteilt. Speziell gilt für n unabhängig und identisch normalverteilte Zufallsvariablen $Y_i \sim N(\mu, \sigma^2)$, dass ihr arithmetisches Mittel $\overline{Y}$ wiederum normalverteilt ist mit gleichem Erwartungswert μ und neuer Varianz σ^2/n.

Liegen nun n unabhängig und identisch normalverteilte Zufallsvariablen Y_i vor mit $Y_i = \ln X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$, so ist ihr arithmetisches Mittel $\overline{Y}$ gleich dem Logarithmus des geometrischen Mittels $\overline{X}_g$ der lognormalverteilten Zufallsvariablen X_i:

$$\overline{Y} = \frac{1}{n} \sum \ln X_i = \frac{1}{n} \ln \left(\prod X_i \right) = \ln \left[\left(\prod X_i \right)^{1/n} \right] = \ln \left(\overline{X}_g \right) . \tag{2.9}$$

Die Lognormalverteilung zeichnet sich analog zur Additivität der Normalverteilung durch ihre Stabilität unter Multiplikation aus: Das Produkt unabhängiger lognormalverteilter Zufallsvariablen ist ebenfalls lognormalverteilt. Speziell gilt jetzt für n unabhängig und identisch lognormalverteilte Zufallsvariablen $X_i \sim \Lambda(\mu, \sigma^2)$, dass ihr geometrisches Mittel $\overline{X}_g$ wiederum lognormalverteilt ist mit gleichem Erwartungswert μ und neuer Varianz σ^2/n (vgl. Rinne, 1997, S. 366).

Die Parameterschätzer der Lognormalverteilung sind gerade die Maximum-Likelihood-Schätzer der Normalverteilung mit logarithmierten Werten. Liegen also n unabhängig und identisch lognormalverteilte Zufallsvariablen $X_i \sim \Lambda(\mu, \sigma^2)$ mit den Beobachtungen $x_1, \ldots, x_n$ vor, so lauten die Parameterschätzer für μ und σ:

$$\hat{\mu} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \ln x_i \qquad \text{und} \qquad \hat{\sigma} = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (\ln x_i - \hat{\mu})^2} \tag{2.10}$$

(vgl. Johnson, Kotz und Balakrishnan, 1994, Abschnitt 4.1).

Eine Schwierigkeit stellt die Schätzung des Lageparameters λ der dreiparametrigen Lognormalverteilung dar. In der Literatur finden sich zur Lösung dieses Problems zahlreiche Vorschläge. Umfassende und weiterführende Informationen zur Theorie und Anwendung der Lognormalverteilungen finden sich in Aitchison und Brown (1969), Crow und Shimizu (1988) sowie Johnson, Kotz und Balakrishnan (1994). Der Schätzung des dritten Parameters widmen sich außerdem Cohen und Whitten (1988).

2.2 Die Log-Laplace-Verteilung

Die Log-Laplace-Verteilung ist analog zur Lognormalverteilung definiert: Wenn der natürliche Logarithmus einer Zufallsvariablen X Laplace-verteilt ist (also $\ln X =: Y \sim Lp(\mu, \sigma)$), so heißt X log-Laplace-verteilt ($\exp Y = X \sim LLp(\mu, \sigma)$).

Die Dichtefunktionen f_{Lp} und f_{LLp} der Laplace- bzw. der Log-Laplace-Verteilung lauten:

$$f_{Lp}(y) = \frac{1}{2\sigma} \exp\left\{ -\frac{|y - \mu|}{\sigma} \right\} \quad \text{für } -\infty < y < \infty, \tag{2.11}$$

$$f_{LLp}(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\sigma\, x} \exp\left\{ -\dfrac{|\ln x - \mu|}{\sigma} \right\} & \text{für } x > 0 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \tag{2.12}$$

Dabei gilt für die Parameter, dass beide aus den reellen Zahlen und σ zusätzlich größer als 0 sei.

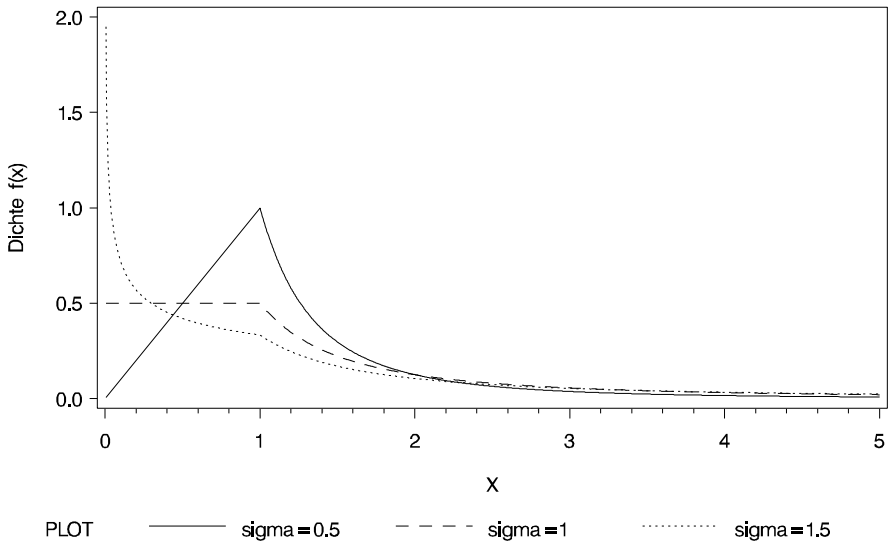

Abbildung 2.2: Dichtefunktionen der Log-Laplace-Verteilung $LLp(0, \sigma)$ für $\sigma = 0.5, 1$ und 1.5

Über die Log-Laplace-Verteilung existiert wenig Literatur. Uppuluri (1981) erwähnt ihre Verwendung in der Medizin, wenn das Verhalten von Dosis-Antwort-Kurven für niedrige Dosen extrapoliert werden soll (da diese Kurven aufgrund der niedrigen Konzentrationen nicht aus Laborversuchen gewonnen werden können).

Zwei interessante Eigenschaften der Log-Laplace-Verteilung sind die ungewöhnliche Form ihrer Dichte und die eingeschränkte Existenz ihrer Momente. Die Abbildungen 2.2 und 2.3 stellen Dichtefunktionen der Log-Laplace-Verteilung $LLp(\mu, \sigma)$ mit jeweils $\mu = 0$ und verschiedenen Werten des Parameters σ dar. Dabei zeigt sich, dass sich die Dichtefunktionen für kleine Werte x nicht immer dem Wert 0 nähern und in Form und Krümmung sehr unterschiedlich sind.

Die Dichte der Log-Laplace-Verteilung ist wie die Dichte der Laplace-Verteilung gespitzt, jedoch verschwindet diese Spitze mit größer werdendem Parameter σ zunehmend. Außerdem ist die Dichte nicht für alle Parameterkombinationen eingipflig, der Modalwert ist dann entweder nicht eindeutig (zum Beispiel für die Kombination $(\mu, \sigma) = (0, 1)$) oder nicht existent (vgl. Abbildungen 2.2 und 2.3). Der Median liegt, bedingt durch die logarithmische Transformation, bei $\exp \mu$.

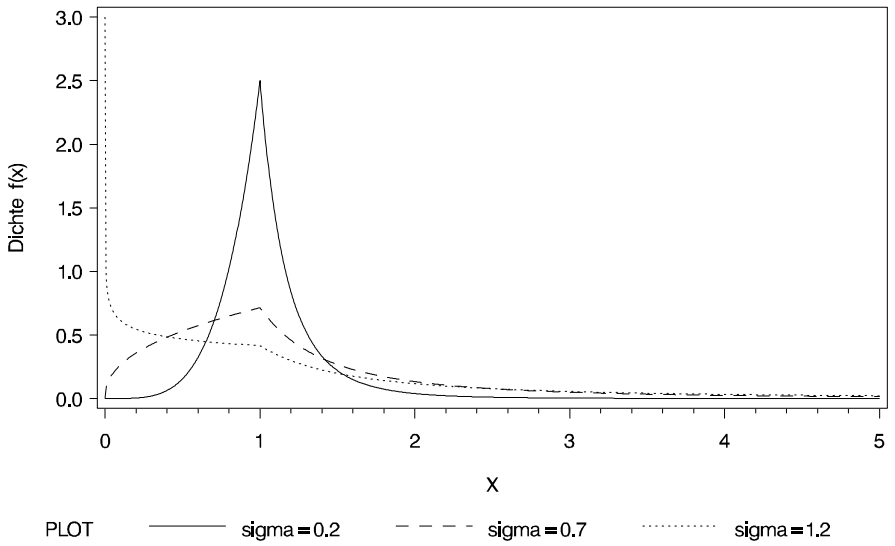

Abbildung 2.3: Dichtefunktionen der Log-Laplace-Verteilung $LLp(0, \sigma)$ für $\sigma = 0.2, 0.7$ und 1.2

Die Untersuchung der Dichte einer log-Laplace-verteilten Zufallsvariablen ergibt, dass sich die Dichtefunktionen in drei Gruppen aufteilen lassen. Dies geschieht bezüglich des Parameters σ und zwar für $\sigma < 1$, $\sigma = 1$ und $\sigma > 1$. Die Betragsfunktionen bedingen dabei eine zusätzliche Fallunterscheidung in Bezug auf den Median und so folgt für die Dichte f im Fall $\sigma = 1$:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2 \exp \mu} & \text{für } 0 < x \leq \exp \mu \\ \\ \dfrac{\exp \mu}{2x^2} & \text{für } x > \exp \mu. \end{cases} \tag{2.13}$$

Für $\sigma = 1$ verläuft die Dichtefunktion also bis zum Median hin konstant (und nähert sich danach dem Wert 0, vgl. Abbildung 2.2).

Die erste Ableitung und damit die Steigung der Dichtefunktion ist negativ für alle Werte x, die größer als der Median sind. An der Stelle $x = \exp \mu$ hat die links- wie die rechtsseitige Ableitung den Wert 0. Für $0 < x < \exp \mu$ gilt:

$$f'(x) \begin{cases} > 0 & \\ = 0 & \text{für} \quad \sigma = 1 \\ < 0 & \end{cases} \tag{2.14}$$

Daraus folgt, dass die Dichtefunktion nur für den Fall $\sigma < 1$ einen eindeutigen Hochpunkt besitzt und der Modalwert somit gleich dem Median ist. Im Fall $\sigma = 1$ ist der Modalwert nicht eindeutig, sondern gleich $1/(2 \exp \mu)$ für alle Werte x im Intervall $(0, \exp \mu]$. Ist σ größer als 1, so existiert der Modalwert nicht und es gilt: $\lim_{x \to 0^+} \to +\infty$.

Für das p-te Moment μ_p der Log-Laplace-Verteilung gilt:

$$\begin{aligned} \mu_p = \mathrm{E}[X^p] &= \frac{1}{2\sigma} \int_0^\infty x^{p-1} \exp\left\{ -\frac{|\ln x - \mu|}{\sigma} \right\} \, \mathrm{d}x \\ &= \frac{\exp\{-\mu/\sigma\}}{2\sigma} \int_0^{\exp \mu} x^{p-1+1/\sigma} \, \mathrm{d}x + \frac{\exp\{\mu/\sigma\}}{2\sigma} \int_{\exp \mu}^\infty x^{p-1-1/\sigma} \, \mathrm{d}x. \end{aligned} \tag{2.15}$$

Letzteres Integral konvergiert dann und nur dann, wenn gilt:

$$p - 1 - \frac{1}{\sigma} < -1 \quad \Leftrightarrow \quad p\,\sigma < 1. \tag{2.16}$$

Ist diese Bedingung nicht erfüllt, so divergiert das Integral (vgl. Bronstein [et al.], 1997, S. 413). Mit $p\,\sigma < 1$ lässt sich das p-te Moment berechnen als:

$$\mu_p = \frac{\exp\{p\mu\}}{1 - (p\sigma)^2}. \tag{2.17}$$

Im Fall $p\,\sigma \geq 1$ existiert das p-te Moment nicht. Da p aus den natürlichen Zahlen stammt, schließen die Fälle $\sigma > 1$ und $\sigma = 1$ die Existenz der Momente prinzipiell aus, für $\sigma < 1$ existiert wenigstens der Erwartungswert und es gilt der Zusammenhang: Erwartungswert > Median = Modalwert.

Die Verteilungsfunktion F der Log-Laplace-Verteilung lässt sich geschlossen darstellen und es gilt analog zur Laplace-Verteilung (vgl. Rinne, 1997, S. 405):

$$F(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2} \exp\left\{ -\dfrac{\mu - \ln x}{\sigma} \right\} & \text{für } x \leq \exp \mu \\ \\ 1 - \dfrac{1}{2} \exp\left\{ -\dfrac{\ln x - \mu}{\sigma} \right\} & \text{für } x \geq \exp \mu. \end{cases} \tag{2.18}$$

Daraus folgt die Inverse der Verteilungsfunktion als:

$$F^{-1}(\alpha) = x_\alpha = \begin{cases} \exp\{\mu + \sigma \ln(2\alpha)\} & \text{für } 0 < \alpha \leq 0.5 \\ \exp\{\mu - \sigma \ln[2(1-\alpha)]\} & \text{für } 0.5 \leq \alpha < 1. \end{cases} \tag{2.19}$$

Nach dieser kurzen Übersicht beschäftigen sich die folgenden Kapitel mit der verallgemeinerten Lognormalverteilung, deren Definition die Lognormal- und die Log-Laplace-Verteilung als Spezialfälle zulässt. Dabei werden die Eigenschaften dieser beiden Verteilungen an geeigneter Stelle um weitere Charakteristiken ergänzt. So zum Beispiel im Kapitel 4, das sich den Lorenzkurven und den Ungleichheitsmaßen der verallgemeinerten Lognormalverteilung widmet.

Kapitel 3

Die verallgemeinerte Lognormalverteilung

Die verallgemeinerte Lognormalverteilung ergibt sich aus der verallgemeinerten Normalverteilung. Der folgende Abschnitt 3.1 erläutert daher die theoretische Herleitung der verallgemeinerten Normalverteilung. Die anschließenden Abschnitte beschäftigen sich mit den grundlegenden Eigenschaften der verallgemeinerten Lognormalverteilung.

Die Inhalte dieses Kapitels sind im Wesentlichen der vorhandenen Literatur entnommen und um eigene Betrachtungen ergänzt worden. So findet sich im Abschnitt 3.2 die Herleitung der verallgemeinerten Standardnormalverteilung und ihrer Verteilungsfunktion. Hieraus lässt sich die Verteilungsfunktion der verallgemeinerten Lognormalverteilung ableiten. Die Betrachtungen zur Hazardrate (Abschnitt 3.5) und zur Entropie (Abschnitt 3.6) entstammen ebenfalls nicht der vorhandenen Literatur.

3.1 Theoretische Herleitung

Die Übergänge normal/lognormal und Laplace/log-Laplace ergeben sich durch die Anwendung der Exponentialfunktion bzw. des natürlichen Logarithmus auf die jeweiligen Zufallsvariablen. Die Verallgemeinerung der Lognormalverteilung erhält man nun nach demselben Prinzip. Die dazu benötigte verallgemeinerte

Normalverteilung N_g wird in der Literatur selten erwähnt. Ihre theoretische Herleitung findet sich bei Vianelli (1963) und Lunetta (1963).

Es bezeichne N_g die verallgemeinerte (generalisierte) Normalverteilung. Als Ansatz für ihre Dichtefunktion wird eine Funktion f_{N_g} gewählt, für die gilt:

$$f_{N_g}(y) = a \exp\{-b\,|y-c|^r\} \quad \text{für } -\infty < y < \infty, \tag{3.1}$$

wobei die unbekannten Parameter a, b, c und r aus den reellen Zahlen seien und zusätzlich gelte: a und b seien größer als 0 und r größer gleich 1. Damit die Dichte (3.1) wohldefiniert ist, muss gelten:

$$a = \frac{1}{\int\limits_{-\infty}^{\infty} \exp\{-b|y-c|^r\}\,\mathrm{d}y} = \frac{b^{1/r}}{2\,\Gamma\left(1+\frac{1}{r}\right)}, \tag{3.2}$$

wobei $\Gamma(\cdot)$ die Gammafunktion bezeichne. Man erhält daher als Dichtefunktion zunächst:

$$f_{N_g}(y) = \frac{b^{1/r}}{2\,\Gamma\left(1+\frac{1}{r}\right)} \exp\left\{-b|y-c|^r\right\}. \tag{3.3}$$

Lunetta (1963) zeigt, dass der Parameter c gerade der Erwartungswert μ einer verallgemeinert normalverteilten Zufallsvariablen Y ist und dass für das p-te zentrale Absolutmoment μ'_p gilt:

$$\mu'_p := E[|Y-\mu|^p] = b^{-p/r}\frac{\Gamma\left(\frac{p+1}{r}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{r}\right)}. \tag{3.4}$$

Setzt man in obiger Gleichung nun $p = r$, so folgt für den Parameter b:

$$b = \frac{1}{r\,\mu'_r}. \tag{3.5}$$

Die Dichtefunktion der verallgemeinerten Normalverteilung erhält man schließlich als:

$$f_{N_g}(y) = \frac{1}{2(r\,\mu'_r)^{1/r}\Gamma\left(1+\frac{1}{r}\right)} \exp\left\{-\frac{|y-\mu|^r}{r\,\mu'_r}\right\} \quad \text{für } -\infty < y < \infty. \tag{3.6}$$

Für die Parameterwahl $r = 1$ folgt die Dichte einer Laplace-verteilten und für $r = 2$ die Dichte einer normalverteilten Zufallsvariablen. Wendet man die Exponentialfunktion auf eine verallgemeinert normalverteilte Zufallsvariable Y an, so ist die daraus resultierende neue Zufallsvariable $X = \exp Y$ verallgemeinert

lognormalverteilt. Die verallgemeinerte Lognormalverteilung sei mit Λ_g gekennzeichnet. Für die Dichtefunktion f_{Λ_g} einer verallgemeinert lognormalverteilten Zufallsvariablen gilt analog zu den Fällen Lognormal- und Log-Laplace-Verteilung des vorhergehenden Kapitels:

$$f_{\Lambda_g}(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2(r\,\mu'_r)^{1/r}\Gamma\left(1+\frac{1}{r}\right)\,x} \exp\left\{-\dfrac{|\ln x-\mu|^r}{r\,\mu'_r}\right\} & \text{für } x>0 \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases} \tag{3.7}$$

wobei der Parameter μ den Erwartungswert $\mathrm{E}[\ln X]$ und μ'_r das r-te zentrale Absolutmoment der Zufallsvariablen $\ln X$ bezeichnen. Die beiden Parameter entsprechen also denen aus obiger Gleichung (3.6), da die Zufallsvariable $Y = \ln X$ gerade verallgemeinert normalverteilt ist.

Löst man die Darstellung der verallgemeinerten Lognormalverteilung von der etwas umständlichen Notation der verallgemeinerten Normalverteilung, so bietet es sich an, das Tripel (μ, μ'_r, r) durch das Tripel (θ_1, θ_2, r) mit $\theta_1 := \mu$ und $\theta_2^r := \mu'_r$ zu ersetzen. Für die Parameterwahl $r = 1$ erhält man die Dichte der Log-Laplace- und für $r = 2$ die Dichte der Lognormalverteilung.

3.2 Dichte- und Verteilungsfunktion

Die Dichte $f(x|\theta_1, \theta_2, r)$ (oder im Folgenden kurz: $f(x)$) einer Zufallsvariablen X aus der verallgemeinerten Lognormalverteilung Λ_g mit dem Parametertripel (θ_1, θ_2, r) sei analog zum vorhergehenden Abschnitt definiert als:

$$f(x|\theta_1,\theta_2,r) := \begin{cases} \dfrac{c}{\theta_2 x} \exp\left\{-\dfrac{1}{r}\left|\dfrac{\ln x-\theta_1}{\theta_2}\right|^r\right\} & x>0 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \tag{3.8}$$

Der Träger der Dichte ist auf die positiven reellen Zahlen beschränkt. Für die Parameter gilt, dass alle aus den reellen Zahlen stammen und zusätzlich θ_2 positiv und r größer gleich 1 ist. Der Faktor c hängt nur vom Parameter r ab und wird der einfacheren Schreibweise wegen verwendet. Es gilt:

$$c := \frac{1}{2r^{\frac{1}{r}}\,\Gamma\left(1+\frac{1}{r}\right)} > 0 \quad \text{für alle } r \geq 1. \tag{3.9}$$

Die Parameter θ_2 und r sind Formparameter und θ_1 Skalenparameter der Verteilung der Zufallsvariablen X. Durch den Zusammenhang verallgemeinert normal-

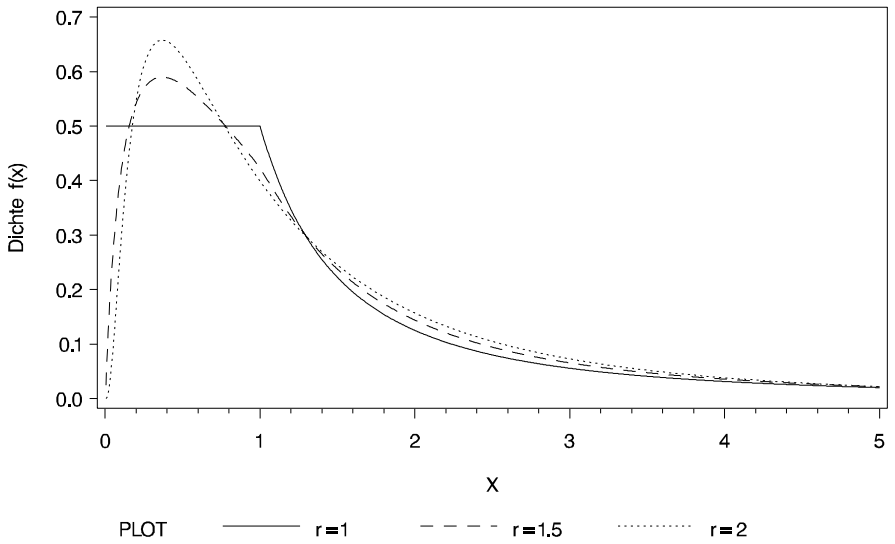

Abbildung 3.1: Dichtefunktionen $f(x|0,1,r)$ für $r = 1, 1.5$ und 2

und lognormalverteilter Zufallsvariablen über die Exponentialfunktion bzw. den natürlichen Logarithmus folgt, dass $\exp\theta_1$ gerade der Median der Verteilung der Zufallsvariablen X ist. Dieser sei im Folgenden mit x_{med} bezeichnet.

Interessant ist die verallgemeinerte Lognormalverteilung besonders durch den zusätzlichen Formparameter r. Durch seine Hinzunahme entsteht eine Fülle möglicher Variationen für eingipflige, rechtsschiefe Verteilungen mit positiven Werten. Dies stellt – im Hinblick auf die Anpassung einer theoretischen Verteilung an gegebene Daten – eine sinnvolle Erweiterung der einfachen Lognormalverteilung dar.

Die Abbildungen 3.1 und 3.2 geben Dichtefunktionen der verallgemeinerten Lognormalverteilung $\Lambda_g(0,1,r)$ für verschiedene Werte von r wieder. Es handelt sich dabei nicht um die Standardlognormalverteilung, da $\Lambda_g(0,1,r)$ weder Erwartungswert 0 noch Varianz 1 hat. Abbildung 3.1 beinhaltet noch einmal die Log-Laplace- und die Lognormalverteilung. Die gespitzte Form der Dichte tritt nur für $r = 1$ auf und ist hier charakteristisch für die Log-Laplace-Verteilung, während sich die einfache Lognormalverteilung der Form nach in die verallgemeinerten Lognormalverteilungen mit $1 < r < \infty$ einreiht. Mit zunehmendem r werden die Dichtefunktionen steiler und schmaler, außerdem zeigen sie im Bereich

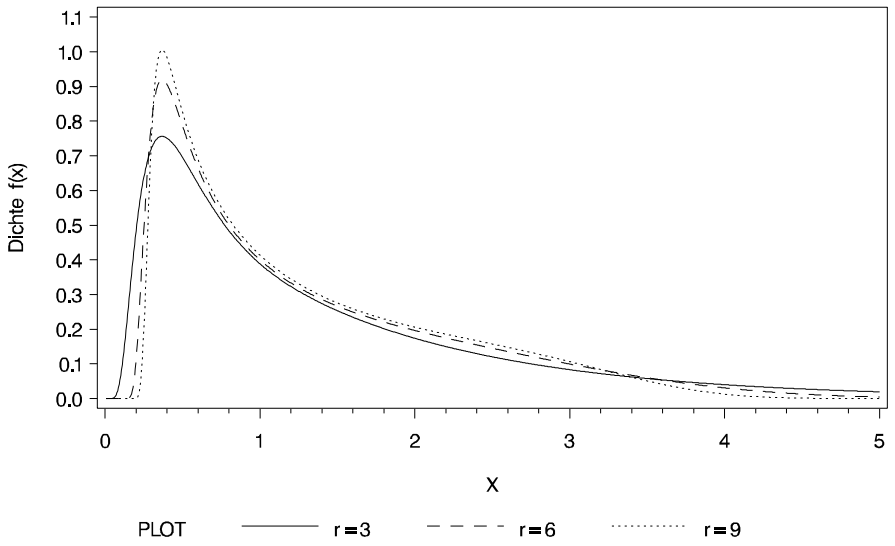

Abbildung 3.2: Dichtefunktionen $f(x|0,1,r)$ für $r = 3, 6$ und 9

nach ihrem Extremum Unterschiede im Krümmungsverhalten für verschiedene Werte des Parameters r (vgl. Abbildung 3.2). Auf diese Besonderheit wird im Abschnitt 3.3 näher eingegangen. Im Hinblick auf die im Kapitel 6 beschriebene Anwendung der verschiedenen Verfahren auf eine Einkommensstichprobe kann an dieser Stelle gesagt werden, dass die für Einkommensverteilungen interessanten Werte von r im Bereich $1 < r < 3$ liegen dürften. Darüber hinaus werden die Verteilungen zu schmal.

Wie im Falle der Normalverteilung existiert für die verallgemeinerte Lognormalverteilung keine geschlossene Form der Verteilungsfunktion F. Pollastri (1987) liefert ihre formale Darstellung als:

$$F(x) = \begin{cases} \dfrac{\Gamma\left(\frac{1}{r}, B(x)\right)}{2\,\Gamma\left(\frac{1}{r}\right)} & \text{für } x < \exp\theta_1 \\ \dfrac{1}{2} & \text{für } x = \exp\theta_1 \\ \dfrac{1}{2} + \dfrac{\gamma\left(\frac{1}{r}, M(x)\right)}{2\,\Gamma\left(\frac{1}{r}\right)} & \text{für } x > \exp\theta_1 \end{cases} \tag{3.10}$$

mit

$$B(x) = \frac{1}{r}\left(\frac{\theta_1 - \ln x}{\theta_2}\right)^r, \quad M(x) = \frac{1}{r}\left(\frac{\ln x - \theta_1}{\theta_2}\right)^r \tag{3.11}$$

sowie den unvollständigen Gammafunktionen

$$\Gamma(v,y) = \int_y^\infty \exp\{-t\}t^{v-1}\,\mathrm{d}t \quad \text{und} \quad \gamma(v,y) = \int_0^y \exp\{-t\}t^{v-1}\,\mathrm{d}t. \quad (3.12)$$

Im Abschnitt 2.1 wurde der Zusammenhang der Verteilungsfunktion einer lognormalverteilten Zufallsvariablen mit der Verteilungsfunktion Φ der Standardnormalverteilung beschrieben. Die verallgemeinerte Lognormalverteilung lässt sich durch den zusätzlichen Parameter r aber nicht auf die Standardnormalverteilung zurückführen. Möchte man das System beibehalten, so ist eine verallgemeinerte Standardnormalverteilung nötig, die man durch die im Folgenden beschriebene Standardisierung erhält.

Für die Dichte f einer verallgemeinert normalverteilten Zufallsvariablen Y gilt:

$$f(y) = \frac{c}{\theta_2}\,\exp\left\{-\frac{1}{r}\left|\frac{y-\theta_1}{\theta_2}\right|^r\right\} \quad (3.13)$$

mit c wie in (3.9). Daraus folgt als Erwartungswert $\mathrm{E}[Y] = \theta_1$. Für die Varianz bzw. die Standardabweichung gilt jedoch:

$$\sigma_Y = r^{\frac{1}{r}}\sqrt{\frac{\Gamma\left(\frac{3}{r}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{r}\right)}}\,\theta_2 =: A\,\theta_2 \quad (3.14)$$

(vgl. Lunetta, 1963). Setzt man $\theta_2 = 1$, so hängt die Standardabweichung weiterhin von r ab und ist ungleich 1 (außer natürlich im Fall $r = 2$). Die Verteilung $N_g(0,1,r)$ stellt also im allgemeinen Fall nicht die verallgemeinerte Standardnormalverteilung dar.

Nach Standardisierung und Termumformungen ergibt sich als Dichtefunktion ϕ_r der Zufallsvariablen $U := \dfrac{Y-\theta_1}{A\,\theta_2}$:

$$\begin{aligned}\phi_r(u) &= c\,A\,\exp\left\{-\frac{1}{r}|A\,u|^r\right\} \\ &= \frac{1}{2\,\Gamma\left(1+\frac{1}{r}\right)}\sqrt{\frac{\Gamma\left(\frac{3}{r}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{r}\right)}}\,\exp\left\{-\left[\frac{\Gamma\left(\frac{3}{r}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{r}\right)}\right]^{\frac{r}{2}}|u|^r\right\}. \quad (3.15)\end{aligned}$$

Die Zufallsvariable U ist daher verallgemeinert standardnormalverteilt in Abhängigkeit von r. Ihre Verteilungsfunktion Φ_r lässt sich berechnen über das Integral:

$$\Phi_r(u) := \int_{-\infty}^{u} \phi_r(t)\ \mathrm{d}t. \tag{3.16}$$

Eine verallgemeinert lognormalverteilte Zufallsvariable $X \sim \Lambda_g(\theta_1, \theta_2, r)$ impliziert nun:

$$\mathrm{E}[\ln X] = \theta_1 \text{ und } \sigma_{\ln X} = r^{\frac{1}{r}} \sqrt{\frac{\Gamma\left(\frac{3}{r}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{r}\right)}}\,\theta_2. \tag{3.17}$$

Die Verteilungsfunktion der Zufallsvariablen X lässt sich somit zurückführen auf die Verteilungsfunktion der verallgemeinerten Standardnormalverteilung der Ordnung r und es gilt der Zusammenhang:

$$X \sim \Lambda_g(\theta_1, \theta_2, r) \quad \Rightarrow \quad F(x) = \Phi_r\left(\frac{\ln x - \theta_1}{\theta_2}\right). \tag{3.18}$$

Um die Verteilungsfunktion Φ_r zu erhalten, muss das Integral (3.16) numerisch berechnet werden. Von den möglichen Standardverfahren der numerischen Integration liefert die Tangentenregel die besten Resultate (vgl. Erwe, 1962, S. 51). Zur Berechnung des Integrals $\int_a^b g(x)\ \mathrm{d}x$ wird das Intervall $[a, b]$ in m gleiche Teile der Breite $h = (b-a)/m$ geteilt, wobei m gerade und positiv ist. Mit $x_i = a + ih$ und $y_i = g(x_i)$ gilt:

$$\int_a^b g(x)\ \mathrm{d}x \approx 2h(y_1 + y_3 + y_5 + \cdots + y_{m-1}). \tag{3.19}$$

Als Beispiel befindet sich die Tafel der verallgemeinerten Standardnormalverteilung für $r = 3$ im Anhang B. Vergleicht man diese mit der in den meisten statistischen Lehrbüchern vertafelten Standardnormalverteilung ($r = 2$), so erkennt man, dass sich die Werte für $r = 3$ schneller dem Wert 1 nähern als für $r = 2$.

Wie oben gezeigt, ist es möglich, die Verteilungsfunktion der verallgemeinerten Standardnormalverteilung analog zur Verteilungsfunktion der einfachen Standardnormalverteilung einzuführen. Erstere Verteilungsfunktion würde im Folgenden benötigt, um zum Beispiel Abbildungen der Verteilungsfunktion der verallgemeinerten Lognormalverteilung zu erzeugen. Der Rechenaufwand ist jedoch

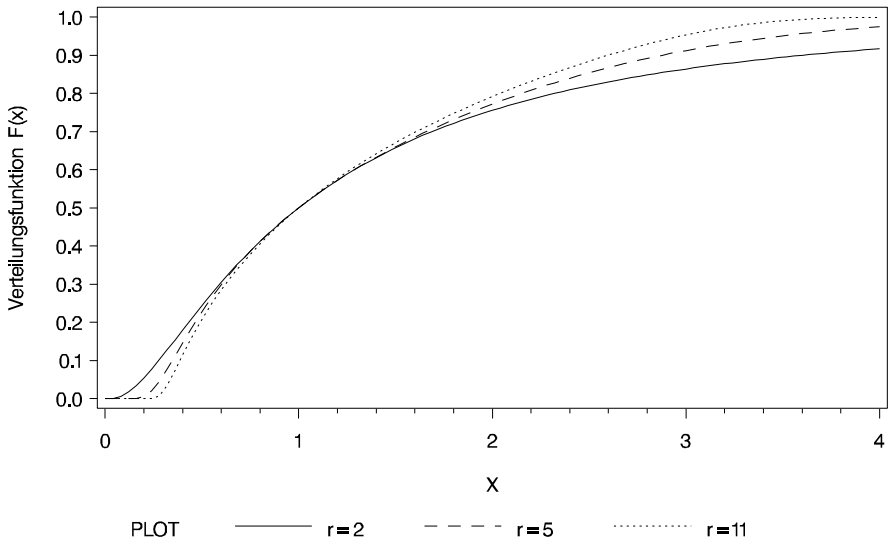

Abbildung 3.3: Verteilungsfunktionen $F(x|0,1,r)$ für $r = 2, 5, 11$

geringer, wenn die jeweilige Verteilungsfunktion durch Integration über die Dichte (3.8) direkt (und nicht über den Umweg Φ_r) numerisch berechnet wird. Dies geschieht wiederum mit der Tangentenregel. Dabei beträgt die Anzahl der Teilintervalle jeweils $m = 2000$.

Abbildung 3.3 zeigt drei Verteilungsfunktionen von $\Lambda_g(0,1,r)$ für $r = 2, 5$ und 11 im Intervall $[0,4]$. Mit zunehmendem r steigen die Verteilungsfunktionen später und dafür schneller an (mit dem gemeinsamen Schnittpunkt im Median). Dieses Verhalten war zu erwarten, da die Dichten mit zunehmendem r immer schmaler und steiler werden (vgl. Abbildung 3.2) und in ihren Rändern daher weniger Wahrscheinlichkeitsmasse aufweisen.

3.3 Eigenschaften der Dichte

Brunazzo und Pollastri (1986) haben sich eingehend mit der Dichte der verallgemeinerten Lognormalverteilung beschäftigt. Die Ergebnisse ihrer Untersuchungen werden in diesem und im folgenden Abschnitt 3.4 vorgestellt.

Der Modalwert einer Verteilung ist definiert als globales Maximum der entsprechenden Dichtefunktion. Die Existenz des Modalwertes der Log-Laplace-Verteilung wurde im Abschnitt 2.2 diskutiert. Beschränkt man sich auf den Fall $r > 1$, so lauten die ersten und zweiten Ableitungen der Dichtefunktion einer verallgemeinert lognormalverteilten Zufallsvariablen:

$$f'(x) = \frac{f(x)}{x}\left[-1 - \frac{1}{\theta_2^r}\,|\ln x - \theta_1|^{r-1}\right], \tag{3.20}$$

$$\begin{aligned} f''(x) = \frac{f(x)}{x^2}&\left[1 + \frac{1}{\theta_2^r}\,|\ln x - \theta_1|^{r-1}\right]^2 + \\ &+ \frac{f(x)}{x^2}\left(1 + \frac{1}{\theta_2^r}\,|\ln x - \theta_1|^{r-1} - \frac{r}{\theta_2^r}\,|\ln x - \theta_1|^{r-2}\right). \end{aligned} \tag{3.21}$$

Die in den Gleichungen (3.20) und (3.21) enthaltenen Betragsfunktionen bedingen eine Fallunterscheidung bezüglich des Medians. Es gilt:

$$0 < x < \exp\theta_1: \quad \lim_{x\to 0^+} f'(x) = 0, \tag{3.22}$$

$$\lim_{x\to(\exp\theta_1)^-} f'(x) = -\frac{c}{\theta_2\exp(2\theta_1)}, \tag{3.23}$$

$$x > \exp\theta_1: \quad \lim_{x\to(\exp\theta_1)^+} f'(x) = -\frac{c}{\theta_2\exp(2\theta_1)}, \tag{3.24}$$

$$f'(x) < 0 \quad \forall\, x > \exp\theta_1. \tag{3.25}$$

Somit ist die Dichtefunktion $f(x)$ differenzierbar im gesamten Definitionsbereich $\mathbb{R}^+$. Nullsetzen der ersten Ableitung für $0 < x < \exp\theta_1$ liefert den Extremwert in:

$$x_{mod} = \exp\left\{\theta_1 - \theta_2^{\frac{r}{r-1}}\right\}. \tag{3.26}$$

Die zweite Ableitung an der Stelle x_{mod} ist negativ, es liegt also ein Hochpunkt vor. Die Dichtefunktion ist somit eingipflig und rechtsschief, da gilt:

$$x_{mod} = \exp\left\{\theta_1 - \theta_2^{\frac{r}{r-1}}\right\} < \exp\theta_1 = x_{med}. \tag{3.27}$$

Mit festem Parameter θ_1 verhält sich der Modalwert folgendermaßen: Mit konstantem r und größer werdendem θ_2 verringert sich sein Wert. Hält man dagegen θ_2 konstant, so verringert er sich mit steigendem r im Falle $\theta_2 < 1$, bleibt konstant für $\theta_2 = 1$ und steigt für $\theta_2 > 1$.

Tabelle 3.1: Anzahl der Wendepunkte der Dichtefunktion

$r > 2$	$0 < x < x_{mod}$	$x_{mod} < x < x_{med}$	$x > x_{med}$
$\theta_2 < \theta_2^*$	1	1	2
$\theta_2 \geq \theta_2^*$	1	1	–
$1 < r < 2$	$0 < x < x_{mod}$	$x_{mod} < x < x_{med}$	$x > x_{med}$
$\theta_2 \leq \theta_2^{**}$	1	–	1
$\theta_2 > \theta_2^{**}$	1	2	1

$$\theta_2^* = \frac{2^{\frac{1}{r}}(3(r-1) - \sqrt{8(r-1)^2+1})}{(3\sqrt{8(r-1)^2+1} - 8r + 7)^{\frac{1}{r}}} \quad \text{und} \quad \theta_2^{**} = -\theta_2^*$$

Eine weitere Charakterisierung der Dichtefunktion wird möglich durch die Suche nach Wendepunkten und durch die Beschreibung des Krümmungsverhaltens der Kurve. Dazu wird die zweite Ableitung durch die Differenz zweier Funktionen beschrieben und das Vorzeichenverhalten dieser Differenz untersucht. Da dies Fallunterscheidungen nach r, θ_2 und x erfordert, sollen hier nur die Ergebnisse vorgestellt werden (vgl. Tabelle 3.1). Für die Herleitung sei auf Brunazzo und Pollastri (1986) verwiesen.

Als Beispiel einer Dichtefunktion mit mehreren Wendepunkten betrachte man die Abbildung 3.4. Es liegt der Graph einer Dichtefunktion mit den Parametern $\theta_1 = 0$, $\theta_2 = 0.4$ und $r = 8$ vor. Für $r = 8$ folgt $\theta_2^* \approx 1.145 > 0.4 = \theta_2$, daher sind vier Wendepunkte zu erwarten (vgl. Tabelle 3.1).

Tatsächlich ändert die Dichtefunktion viermal ihre Krümmung (vgl. Abbildung 3.4). Die drei Referenzlinien geben den Modalwert $x_{mod} = \exp\left\{\theta_1 - \theta_2^{\frac{r}{r-1}}\right\} = \exp\left\{-0.4^{8/7}\right\} \approx 0.704$, den Median $x_{med} = \exp\theta_1 = \exp 0 = 1$ sowie den Erwartungswert $\mathrm{E}[X] \approx 1.043$ einer verallgemeinert lognormalverteilten Zufallsvariablen mit obigen Parametern an. Der Erwartungswert ist dem folgenden Abschnitt vorweggenommen.

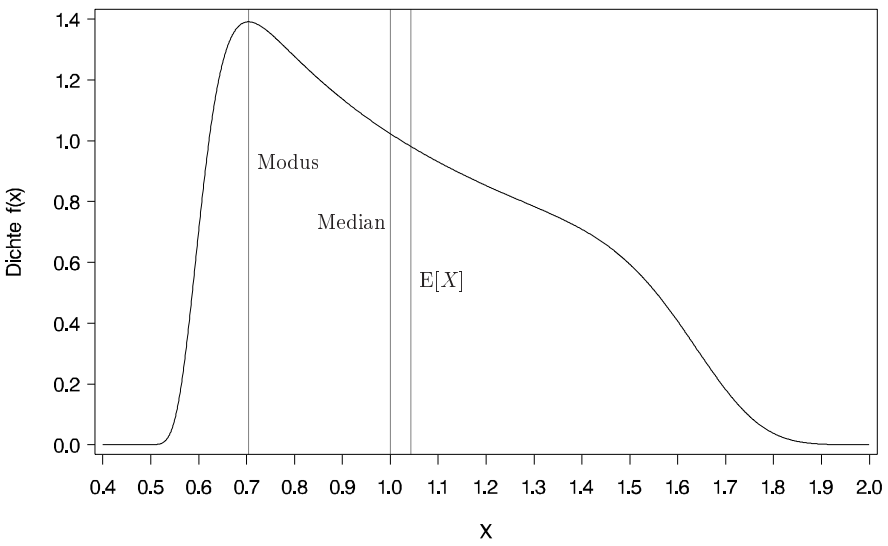

Abbildung 3.4: Dichtefunktion $f(x|0, 0.4, 8)$ mit Modalwert 0.704, Median 1 und Erwartungswert 1.043

3.4 Momente und Verteilungsparameter

Brunazzo und Pollastri (1986) geben das p-te Moment μ_p der verallgemeinerten Lognormalverteilung an als:

$$\mu_p := E[X^p] = \frac{\exp\{p\theta_1\}}{\Gamma\left(\frac{1}{r}\right)} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(p\theta_2)^{2i}}{(2i)!} r^{\frac{2i}{r}} \Gamma\left(\frac{2i+1}{r}\right) \tag{3.28}$$

(zur Herleitung siehe Anhang A.1).

Die Formel (3.28) lässt sich für die beiden Spezialfälle vereinfachen und man erhält die Momente der Lognormal- und der Log-Laplace-Verteilung wie in Kapitel 2. Eine kompaktere Darstellung des p-ten Momentes für Parameterwerte r ungleich 1 oder 2 ist nicht möglich, da sich die Gammafunktion nicht vereinfachen lässt. Im Fall der Log-Laplace-Verteilung bedingt die Konvergenz obiger Reihe die bereits bekannte Einschränkung $p\theta_2 < 1$ und es folgt (vgl. Abschnitt 2.2):

$$\begin{aligned} \mu_p &= \exp\{p\theta_1\} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(p\theta_2)^{2i}}{(2i)!} \Gamma(2i+1) \\ &= \exp\{p\theta_1\} \sum_{i=0}^{\infty} (p\theta_2)^{2i} = \exp\{p\theta_1\} \frac{1}{1-(p\theta_2)^2}. \end{aligned} \tag{3.29}$$

Da also nicht alle Momente der verallgemeinerten Lognormalverteilung für alle Parameterkombinationen existieren, kann auch keine momenterzeugende Funktion existieren. Für die charakteristische Funktion der verallgemeinerten Lognormalverteilung konnte bislang keine geschlossene Darstellung gefunden werden.

Mit Hilfe der Formel (3.28) lässt sich der Erwartungswert $\mu := \mathrm{E}[X] = \mu_1$ der verallgemeinerten Lognormalverteilung abhängig von den Parametern θ_1, θ_2 und r angeben. Vergleicht man für den Fall $r > 1$ Erwartungswert, Median $x_{med} = \exp\theta_1$ und Modalwert $x_{mod} = \exp\left\{\theta_1 - \theta_2^{\frac{r}{r-1}}\right\}$ miteinander, so erhält man für alle Parameterkombinationen $(\theta_1, \theta_2, r > 1)$ die Rechtsschiefe implizierende Beziehung:

$$\text{Erwartungswert} > \text{Median} > \text{Modalwert}. \tag{3.30}$$

Erstere Ungleichung folgt aus:

$$\sum_{i=0}^{\infty} a_i := \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\theta_2^{2i}}{(2i)!} r^{\frac{2i}{r}}\, \Gamma\left(\frac{2i+1}{r}\right) > \Gamma\left(\frac{1}{r}\right), \tag{3.31}$$

da $a_0 = \Gamma\left(\frac{1}{r}\right)$ und $a_i > 0$ für alle $i = 0, 1, 2, \ldots$ und alle Parameterkombinationen (θ_1, θ_2, r) gilt.

Zusätzlich zum Erwartungswert lassen sich weitere Verteilungsparameter wie die Varianz $\sigma^2 := \mathrm{E}\left[(X-\mu)^2\right] = \mu_2 - \mu^2$ bzw. die Standardabweichung σ, der Variationskoeffizient $vk := \sigma/\mu$, der Schiefekoeffizient α_3 sowie der Wölbungskoeffizient α_4 berechnen. Brunazzo und Pollastri (1986) untersuchen das Verhalten einiger Verteilungsparameter numerisch und halten als Ergebnis fest: Vergleicht man die Standardabweichungen σ für verschiedene Werte der Formparameter r und θ_2 (wobei der Skalenparameter θ_1 fest sei), so vergrößert sich bei konstantem r die Variabilität mit steigendem θ_2, während sie sich im umgekehrten Fall verkleinert (θ_2 fest, r größer werdend). Der gleiche Zusammenhang wurde für den Erwartungswert sowie für den Variationskoeffizienten beobachtet.

Die für weitere Kennzahlen benötigten p-ten Zentralmomente $\bar{\mu}_p := \mathrm{E}\left[(X-\mu)^p\right]$ lassen sich auf die Momente zurückführen. Daher gilt für den Schiefekoeffizienten α_3 :

$$\alpha_3 := \frac{\bar{\mu}_3}{\sigma^3} \qquad \text{mit} \qquad \bar{\mu}_3 = \mu_3 - 3\mu\mu_2 + 2\mu^3. \tag{3.32}$$

Der numerische Vergleich der Schiefekoeffizienten für verschiedene Kombinationen der Parameter r und θ_2 führt nach Brunazzo und Pollastri (1986) zu folgendem Ergebnis: Der Schiefekoeffizient α_3 verringert sich bei konstantem r mit zunehmendem Parameter θ_2 und steigt im umgekehrten Fall.

Der Wölbungskoeffizient α_4 ist definiert als:

$$\alpha_4 := \frac{\bar{\mu}_4}{\sigma^4} \qquad \text{mit} \qquad \bar{\mu}_4 = \mu_4 - 4\mu\mu_3 + 6\mu^2\mu_2 - 3\mu^4. \tag{3.33}$$

Pollastri (1997) untersucht die Kurtosis näher und kommt zu dem Ergebnis: Vergleicht man verallgemeinerte Lognormalverteilungen mit gleichem Median und gleicher mittlerer Abweichung vom Median, so verringert sich die Wölbung mit steigenden Werten der Parameter r und θ_2.

3.5 Hazardrate

Die Beschränkung des Trägers auf die Menge der positiven reellen Zahlen ermöglicht es, die verallgemeinerte Lognormalverteilung an Daten aus dem Bereich der Lebensdaueranalyse anzupassen. Mit den gleichen numerischen Methoden, wie sie für die Berechnung der Verteilungsfunktion angewandt wurden (vgl. Abschnitt 3.2), lassen sich hierfür charakteristische Funktionen wie die Hazardrate h bestimmen.

Mit F als Verteilungs- und f als Dichtefunktion einer Lebensdauerverteilung ist die Hazardrate oder Ausfallrate h definiert als:

$$h(x) := \lim_{\Delta x \to 0} \frac{P(x < X \leq x + \Delta x)}{\Delta x} = \frac{f(x)}{1 - F(x)}. \tag{3.34}$$

Betrachtet man ein kleines Zeitintervall Δx, so gibt $h(x)\,\Delta x$ die Wahrscheinlichkeit an, dass der Ausfall eines Objektes im Intervall Δx nach Erreichen des Alters x stattfindet (vgl. Rinne, 1997, S. 337).

Abbildung 3.5 gibt drei Hazardraten $h(x|\theta_1, \theta_2, r)$ der verallgemeinerten Lognormalverteilung für die Parameterkombinationen $\theta_1 = 0$, $\theta_2 = 1.5$ sowie $r = 1$, 2 und 3 wieder. Für die gewählten Parameter nehmen die Hazardraten zunächst ein (lokales) Maximum an und gehen danach langsam gegen 0. Für $r > 1$ haben die Hazardraten im Punkt $h(0)$ den Wert 0. Im Falle der Log-Laplace-Verteilung

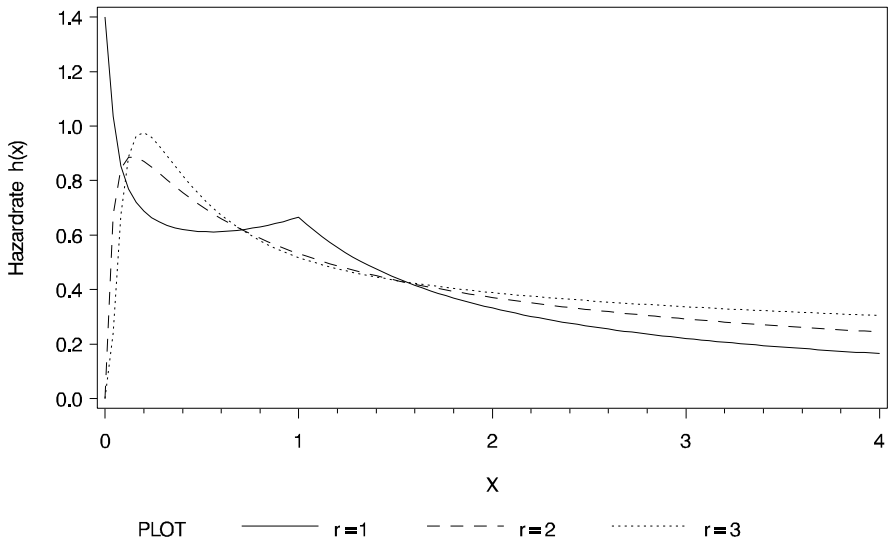

Abbildung 3.5: Hazardraten $h(x|0, 1.5, r)$ für $r = 1, 2$ und 3

$(r = 1)$ hängt ihr Verhalten von der Wahl des Parameters θ_2 ab. Hier gilt mit $\theta_2 > 1$: $\lim_{x \to 0^+} h(x) \to \infty$ (vgl. Abbildung 3.5 sowie Abschnitt 2.2).

Es lässt sich beobachten, dass die Hazardraten für größeres als in Abbildung 3.5 gewähltes r nach dem ersten lokalen Maximum erneut ansteigen, um nach einem weiteren Maximum auf 0 zu fallen. Aufgrund der schlechten graphischen Auflösung wurde auf eine Abbildung verzichtet.

3.6 Entropie

Die Realisierung einer Zufallsvariablen gibt eine Information an den Beobachter weiter. Dabei ist der Informationsgehalt umso größer, je weniger die Realisierung vorhergesagt werden kann. Beobachtet man also beispielsweise ein Ergebnis eines Zufallsexperimentes, so steigt der Informationsgehalt des Ergebnisses, je näher die zugrunde liegende Verteilung der Gleichverteilung kommt. Ist ein Ergebnis mit hoher Wahrscheinlichkeit zu erwarten, so gibt dieses wenig Information an den Beobachter weiter: Sein Informationsgehalt ist gering.

Der Informationsgehalt ist definiert als der natürliche Logarithmus der reziproken Wahrscheinlichkeit einer Realisierung. Die Entropie H bezeichnet den mittleren Informationsgehalt und ist daher für eine stetige Zufallsvariable X mit Dichtefunktion f definiert über den Erwartungswert:

$$H := \mathrm{E}\left[\ln\left(\frac{1}{f(X)}\right)\right] = \mathrm{E}\left[-\ln(f(X))\right], \quad H \in [0, \infty) \tag{3.35}$$

(vgl. Peters, 1967, Kapitel 4).

Für eine verallgemeinert lognormalverteilte Zufallsvariable lautet die Entropie:

$$H = \frac{1}{r} - \ln\frac{c}{\theta_2} + \theta_1 \tag{3.36}$$

mit $c = \left[2r^{\frac{1}{r}}\,\Gamma\left(1+\frac{1}{r}\right)\right]^{-1}$. Die Herleitung der Entropie findet sich in Anhang A.2.

Für die Spezialfälle folgt:

$$r = 2 \quad \Rightarrow \quad H = \frac{1}{2} + \ln\left(\sqrt{2\pi}\,\theta_2\right) + \theta_1, \tag{3.37}$$

$$r = 1 \quad \Rightarrow \quad H = 1 + \ln(2\theta_2) + \theta_1. \tag{3.38}$$

Aus Gleichung (3.36) lässt sich ablesen, dass die Entropie H für größer werdende Werte des Parameters θ_2 logarithmisch steigt, wenn die Parameter r und θ_1 fest gewählt sind. Für feste Parameter θ_2 und θ_1 lässt der Graph der Entropie erkennen, dass die Entropie mit zunehmenden Werten r fällt (vgl. Abbildung 3.6).

Nachdem nun einige grundlegende Eigenschaften genannt wurden, sind den größeren Charakteristikbereichen eigene Kapitel gewidmet. Das folgende Kapitel beschäftigt sich gesondert mit Lorenzkurven und Ungleichheitsmaßen der verallgemeinerten Lognormalverteilung. Der Komplex „Schätzen und Testen der Parameter“ findet sich in Kapitel 5.

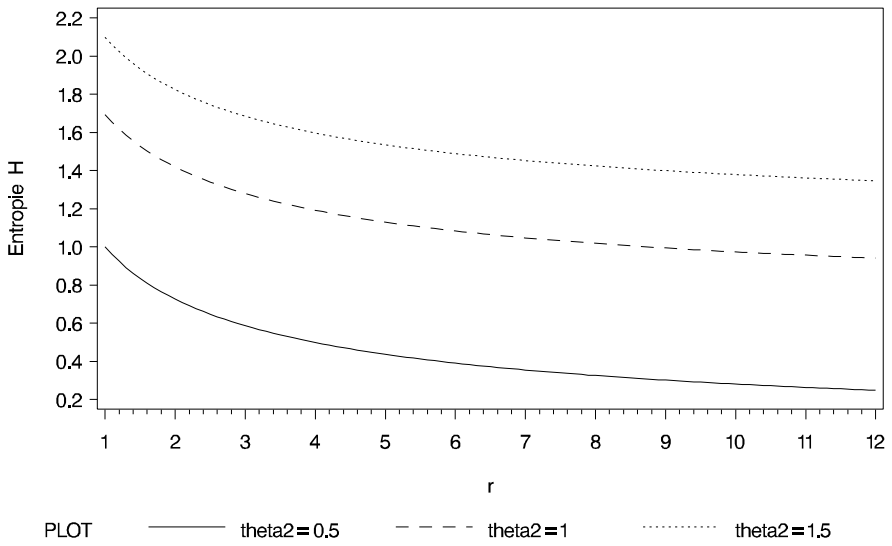

Abbildung 3.6: Entropie H für $\theta_1 = 0$, $\theta_2 = 0.5, 1, 1.5$ und r

Kapitel 4

Lorenzkurve und Ungleichheitsmessung

Die einfache Lognormalverteilung wird häufig als Einkommensverteilung verwendet. Daher ist es sinnvoll, die Themen „Lorenzkurve und Ungleichheitsmessung“ nun für die verallgemeinerte Lognormalverteilung zu betrachten. Die Lorenzkurven können hier aufgrund der komplizierten Formeln jedoch nur graphisch untersucht werden. Bei einigen Ungleichheitsmaßen können geschlossene Darstellungen angegeben werden, wobei die Formeln für vier Theil- und einen modifizierten Pietrakoeffizienten die vorhandene Literatur ergänzen.

4.1 Lorenzkurve und Lorenzordnung

Die Verallgemeinerung der einfachen Lognormalverteilung gründet in der Hoffnung, Verteilungen mit positivem Träger besser anpassen zu können. Interessant ist dies vor allem für Einkommensverteilungen, da bei ihnen die einfache Lognormalverteilung häufig nur eine ungenügende Anpassung liefert. In diesem Zusammenhang werden zunächst die Lorenzkurven näher betrachtet. Aus ihnen lässt sich das Ausmaß der Ungleichheit auf dem Träger entnehmen.

Als empirische Lorenzkurve bezeichnet man eine Abbildung $L : [0,1] \to [0,1]$, deren Funktionswerte $L(p)$ den geschätzten Anteil am Gesamteinkommen angeben, der den $100p\%$ der Ärmsten einer Population zuzuordnen ist. Je weiter sich

die Lorenzkurve von der 45°-Linie entfernt, desto größer ist die Ungleichheit. Der Großteil des Einkommens konzentriert sich auf wenige Personen aus der Population. Das Ausmaß der Ungleichheit wird durch die Ungleichheitsmaße ausgedrückt. Diese werden im Abschnitt 4.2 behandelt.

Die theoretische Lorenzkurve ist definiert als die Verteilungsfunktion der ersten Momentenverteilung einer Zufallsvariablen, wenn man diese Werte über der entsprechenden Verteilungsfunktion abträgt. Die theoretische Lorenzkurve L ist also definiert über das Wertepaar:

$$[p, L(p)] := \left[F(x), F^1(x)\right], \quad x \in [0, \infty), \quad p \in [0, 1], \tag{4.1}$$

wobei F die Verteilungsfunktion und F^1 die Verteilungsfunktion der ersten Momentenverteilung der Zufallsvariablen X bezeichnen (vgl. Wilfling, 1993, Abschnitt 1.1). Letztere Verteilungsfunktion ist definiert als:

$$F^1(x) := \frac{1}{\mathrm{E}[X]} \int_0^x t f(t)\, \mathrm{d}t \tag{4.2}$$

und wird ebenso wie die Verteilungsfunktion numerisch mit Hilfe der Tangentenregel (3.19), S. 22, berechnet. Bei Pollastri (1987) findet sich analog zur Darstellung der Verteilungsfunktion (3.10), S. 20, auch eine formale Darstellung der ersten Momentenverteilung. Auf ihre Angabe wird hier verzichtet, da es sich nicht um eine geschlossene Form handelt.

Die erste Momentenverteilung der einfachen Lognormalverteilung ($r = 2$) entspricht einer Lognormalverteilung mit transformierten Parametern und es gilt der Zusammenhang:

$$X \sim \Lambda_g(x|\theta_1, \theta_2, 2) \quad \Rightarrow \quad F^1(x) = \Lambda_g(x|\theta_1 + \theta_2^2, \theta_2, 2) \tag{4.3}$$

(vgl. Wilfling, 1993, Abschnitt 5.2). Für Lognormalverteilungen höherer Ordnung lässt sich ein solcher Zusammenhang aufgrund der komplexen Darstellung des Erwartungswertes sowie des binomischen Satzes höherer Ordnung ($|\ln x - \theta_1|^r$) nicht finden.

Trägt man die erste Momentenverteilung gegen die Verteilungsfunktion ab, so erhält man die Lorenzkurve der zugrunde liegenden Zufallsvariablen. Pollastri (1987) kommt nach Betrachtung verschiedener Lorenzkurven verallgemeinert lognormalverteilter Zufallsvariablen zu folgendem Ergebnis: Bei festem Parameter θ_2

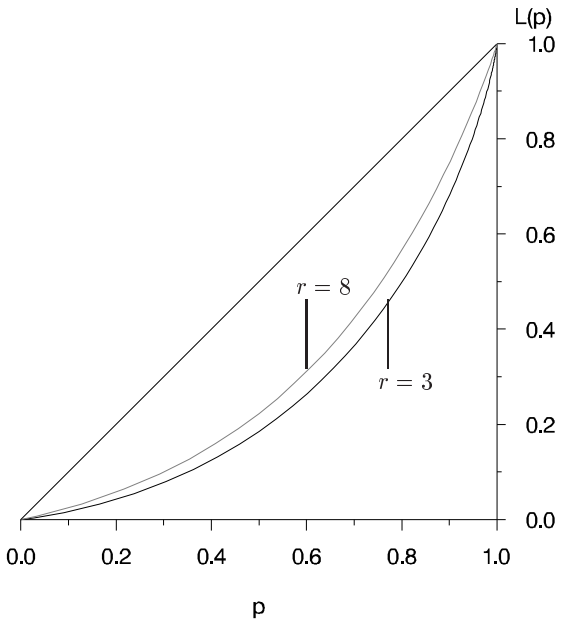

Abbildung 4.1: Lorenzkurven $L(p|0,1,r)$ für $r = 3$ und $r = 8$

und steigenden Werten r nähert sich die Lorenzkurve der 45°-Linie, die Ungleichheit nimmt also ab. Im umgekehrten Fall mit festem r und größer werdendem θ_2 nimmt die Ungleichheit zu, die Lorenzkurve steigt zunächst langsamer an und entfernt sich somit von der 45°-Linie (als Beispiel vgl. Abbildungen 4.1 und 4.2). Außerdem kann vermutet werden, dass sich die Lorenzkurven nicht schneiden. Dies würde bedeuten, dass sich die zugrunde liegenden Zufallsvariablen im Sinne der Lorenzordnung anordnen lassen.

Die Lorenzordnung ist formal wie folgt definiert: Eine Zufallsvariable X heißt stärker konzentriert im Sinne der Lorenzordnung als eine Zufallsvariable Y ($X \geq_L Y$), wenn für alle $p \in [0,1]$ gilt:

$$L_X(p) \leq L_Y(p) \tag{4.4}$$

(vgl. Wilfling, 1993, Abschnitt 1.2). Das heißt, die Lorenzkurve von X liegt im gesamten Intervall $[0,1]$ unter oder auf der Lorenzkurve von Y, die Verteilung von X ist daher stärker konzentriert als die Verteilung von Y (die Ungleichheit von X ist größer als die von Y).

Zum formalen Nachweis der Lorenzordnung stehen einige Theoreme zur Verfügung (vgl. Wilfling, 1993, Abschnitt 1.3). Im Falle der einfachen Lognormalverteilung

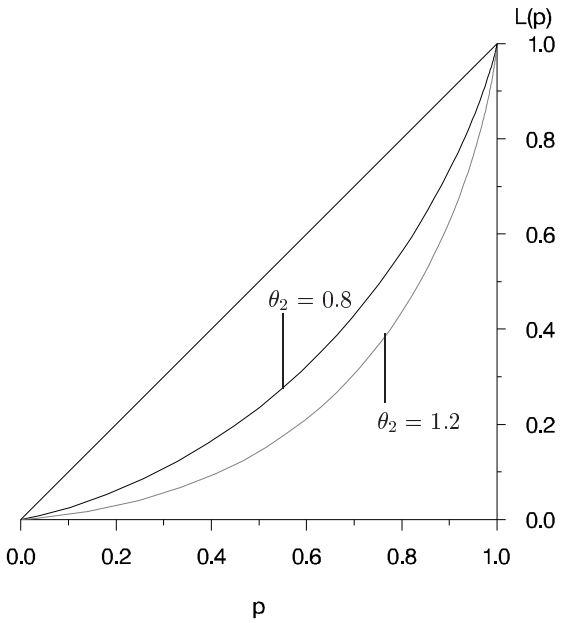

Abbildung 4.2: Lorenzkurven $L(p|0, \theta_2, 3)$ für $\theta_2 = 0.8$ und $\theta_2 = 1.2$

lässt sich beweisen, dass sich die Zufallsvariablen für verschiedene Parameter θ_2 im Sinne der Lorenzordnung anordnen lassen und dass die Ungleichheit mit größer werdendem θ_2 zunimmt. Der Beweis ergibt sich aus dem Zusammenhang (4.3) (vgl. Wilfling, 1993, Abschnitt 5.2). Dieser Nachweis gelingt im allgemeinen Fall nicht ohne weiteres. Allerdings sprechen graphische Vergleiche dafür, dass sich die Lorenzkurven nicht schneiden und sich die zugrunde liegenden Zufallsvariablen daher im Sinne der Lorenzordnung anordnen lassen.

4.2 Ungleichheitsmaße

Das Ausmaß der Ungleichheit einer Zufallsvariablen lässt sich mit Hilfe eines Ungleichheitsmaßes ausdrücken: Je höher sein Wert, desto größer ist die Ungleichheit. Es stehen eine Vielzahl von Ungleichheitsmaßen zur Verfügung, worunter der bekannteste wohl der Gini-Koeffizient G ist. Er lässt sich theoretisch berechnen über die Verteilungsfunktion F und die Verteilungsfunktion der ersten Momentenverteilung F^1 einer Zufallsvariablen X:

$$G := \int_0^\infty \left[\frac{x}{\mathrm{E}[X]} F(x) - F^1(x) \right] f(x) \, \mathrm{d}x \tag{4.5}$$

(vgl. Butler und McDonald, 1989). Obige Formel lässt sich im Falle der verallgemeinerten Lognormalverteilung nur numerisch bestimmen, wobei die Berechnung der Doppelintegrale mit hohem Rechenaufwand verbunden ist. Pollastri (1987) verwendet daher als Approximation für den theoretischen Gini-Koeffizienten G den Ausdruck:

$$\widetilde{G} = 1 - \sum_{i=1}^{s} \left[F(x_i) - F(x_{i-1})\right] \left[F^1(x_i) + F^1(x_{i-1})\right] \tag{4.6}$$

mit $F(x_0) = F^1(x_0) = 0$ und s als Anzahl der in die Berechnung eingehenden Werte von x. Da die Anzahl s jedoch nie kleiner als 5000 sein sollte, um eine gute Approximation des wahren Gini-Koeffizienten zu gewährleisten, ist auch hier ein erhöhter Rechenaufwand erforderlich. Auf die Berechnung des geschätzten Gini-Koeffizienten wird daher verzichtet. Seine genauere Betrachtung wiederholt die Ergebnisse aus dem vorherigen Abschnitt: Die Ungleichheit steigt mit zunehmendem θ_2 und festem r und nimmt im umgekehrten Fall ab. Bei Pollastri (1987) finden sich Werte von $\widetilde{G}$ für verschiedene Parameterkombinationen im Anhang.

Eine einfachere numerische Berechnung im Falle der verallgemeinerten Lognormalverteilung bieten die beiden Theilkoeffizienten sowie der Pietrakoeffizient (auch Ricci-Schutz-Koeffizient). Die theoretischen ersten und zweiten Theilkoeffizienten T_1 und T_2 sind definiert als:

$$T_1 := \mathrm{E}\left[\frac{X}{\mathrm{E}[X]} \ln\left(\frac{X}{\mathrm{E}[X]}\right)\right], \quad T_1 \in [0, \infty), \tag{4.7}$$

$$T_2 := \mathrm{E}\left[\ln\left(\frac{\mathrm{E}[X]}{X}\right)\right], \quad T_2 \in [0, \infty) \tag{4.8}$$

(vgl. Theil, 1967, Kapitel 4). Ferner existieren modifizierte Theilkoeffizienten T_1^{mod} und T_1^{med}, bei denen der Modalwert bzw. der Median an der Stelle des Erwartungswertes $\mathrm{E}[X]$ steht (vgl. Crow und Shimizu, 1988, S. 11).

Für eine verallgemeinert lognormalverteilte Zufallsvariable folgen die Theilkoeffizienten mit $A := \mathrm{E}[X]/\exp\theta_1$ und dem Erwartungswert $\mathrm{E}[X]$ wie in Gleichung (3.28), S. 26, mit $p = 1$ als:

$$T_1 = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{r}\right) A} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\theta_2^{2i+2}}{(2i+1)!} r^{\frac{2i+2}{r}} \Gamma\left(\frac{2i+3}{r}\right) - \ln A, \tag{4.9}$$

$$T_1^{med} = \frac{\theta_2}{\Gamma\left(\frac{1}{r}\right)} r^{\frac{2}{r}} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\theta_2^{2i+1}}{(2i+1)!} r^{\frac{2i}{r}} \Gamma\left(\frac{2i+3}{r}\right), \tag{4.10}$$

$$\begin{aligned} T_1^{mod} = & \frac{\theta_2}{\Gamma\left(\frac{1}{r}\right) \exp\left\{-\theta_2^{\frac{r}{r-1}}\right\}} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\theta_2^{2i}}{(2i)!} r^{\frac{2i}{r}} \cdot \\ & \cdot \left[\frac{\theta_2}{2i+1} r^{\frac{2}{r}} \Gamma\left(\frac{2i+3}{r}\right) + \theta_2^{\frac{1}{r-1}} \Gamma\left(\frac{2i+1}{r}\right)\right], \end{aligned} \tag{4.11}$$

$$T_2 = \ln A. \tag{4.12}$$

Zur Herleitung sei auf Anhang A.3 - A.6 verwiesen.

Obige Koeffizienten lassen sich für die Spezialfälle der Lognormalverteilung ($r = 2$) und der Log-Laplace-Verteilung ($r = 1$) vereinfachen und man erhält:

$$r = 2 \quad \Rightarrow \quad T_1 = T_2 = \frac{1}{2}\theta_2^2, \tag{4.13}$$

$$r = 1 \text{ und } \theta_2 < 1 \quad \Rightarrow \quad T_1 = \ln(1-\theta_2^2) + \frac{2\theta_2^2}{1-\theta_2^2}, \tag{4.14}$$

$$T_2 = -\ln(1-\theta_2^2). \tag{4.15}$$

Der Pietrakoeffizient P ist definiert als:

$$P := \frac{\mathrm{E}\left[\left|X - \mathrm{E}[X]\right|\right]}{2\,\mathrm{E}[X]}, \quad P \in [0,1] \tag{4.16}$$

(vgl. Rinne, 1997, S. 149). Er lässt sich nicht in einer geschlossenen Form darstellen. Butler und McDonald (1989) führen ihn zurück auf die Verteilungsfunktion und die Verteilungsfunktion der ersten Momentenverteilung an der Stelle des Erwartungswertes, so dass gilt:

$$P = F(\mathrm{E}[X]) - F^1(\mathrm{E}[X]). \tag{4.17}$$

Obiger Ausdruck kann jedoch für die verallgemeinerte Lognormalverteilung nur numerisch bestimmt werden, da keine geschlossene Form existiert. Modifiziert man den Pietrakoeffizienten, indem statt des ersten zentralen Absolutmomentes das erste Absolutmoment um den Median berechnet wird, so lautet der veränderte Pietrakoeffizient P^{med}:

$$P^{med} := \frac{\mathrm{E}[|X - x_{med}|]}{2\,\mathrm{E}[X]}. \tag{4.18}$$

Das erste Absolutmoment der verallgemeinerten Lognormalverteilung um den Median $\mathrm{E}[|X - x_{med}|]$ leitet sich analog zu den Momenten her (vgl. Anhang A.1). Brunazzo und Pollastri (1986) geben es an als:

$$\mathrm{E}[|X - x_{med}|] = \frac{\exp\{\theta_1\}}{\Gamma\left(\frac{1}{r}\right)} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(\theta_2)^{2i+1}}{(2i+1)!} r^{\frac{2i+1}{r}} \Gamma\left(\frac{2i+2}{r}\right). \tag{4.19}$$

Somit lautet der modifizierte Pietrakoeffizient:

$$P^{med} = \frac{\sum \frac{(\theta_2)^{2i+1}}{(2i+1)!} r^{\frac{2i+1}{r}} \Gamma\left(\frac{2i+2}{r}\right)}{2 \sum \frac{(\theta_2)^{2i}}{(2i)!} r^{\frac{2i}{r}} \Gamma\left(\frac{2i+1}{r}\right)}. \tag{4.20}$$

Im Falle der Log-Laplace-Verteilung mit $\theta_2 < 1$ lässt sich obiger Koeffizient vereinfachen zu:

$$P^{med} = \frac{1}{2}\theta_2. \tag{4.21}$$

Trägt man nun beispielsweise den Theilkoeffizienten T_1 aus (4.9) für verschiedene Parameterkombinationen ab, so erhält man die bereits erwähnten Zusammenhänge. Abbildung 4.3 zeigt Werte des Theilkoeffizienten abgetragen über r im Intervall $[1, 2]$. Dabei wurden für den Parameter θ_2 die Werte 0.7, 0.8 und 0.9 gewählt. Man erkennt, dass der Koeffizient T_1 mit steigendem r fällt und mit höherem θ_2 höhere Werte annimmt. In Abbildung 4.4 wird das Prinzip umgekehrt und T_1 abgetragen über θ_2 im Intervall (0,2]. Der Parameter r hat die Werte 2, 3 und 4. Mit steigendem θ_2 erhält man steigende Werte von T_1, wobei der Koeffizient mit kleinerem r höhere Werte annimmt.

Interessant ist es nun zu betrachten, wie sich die Ungleichheit verhält, wenn man beide Formparameter r und θ_2 variiert und nicht jeweils einen davon festhält. Es stellt sich die Frage, ob eventuell ein Zusammenhang zwischen den Parametern in Bezug auf die Ungleichheit besteht und ob sich der Parameterraum in Bereiche aufteilen lässt, in denen die Ungleichheit zu- bzw. abnimmt. Dass ein solcher Zusammenhang besteht, lässt sich zumindest graphisch stützen: Für einen konstanten Wert des Theilkoeffizienten T_1 aus (4.9) werden die Tupel (θ_2, r) gesucht, die zu diesem Wert führen. Dabei wird zunächst θ_2 gewählt und r anschließend iterativ bestimmt. Trägt man nun die Wertepaare ab, so erhält man als Ergebnis: Es besteht ein exponentieller Zusammenhang, der Parameterraum wird in zwei

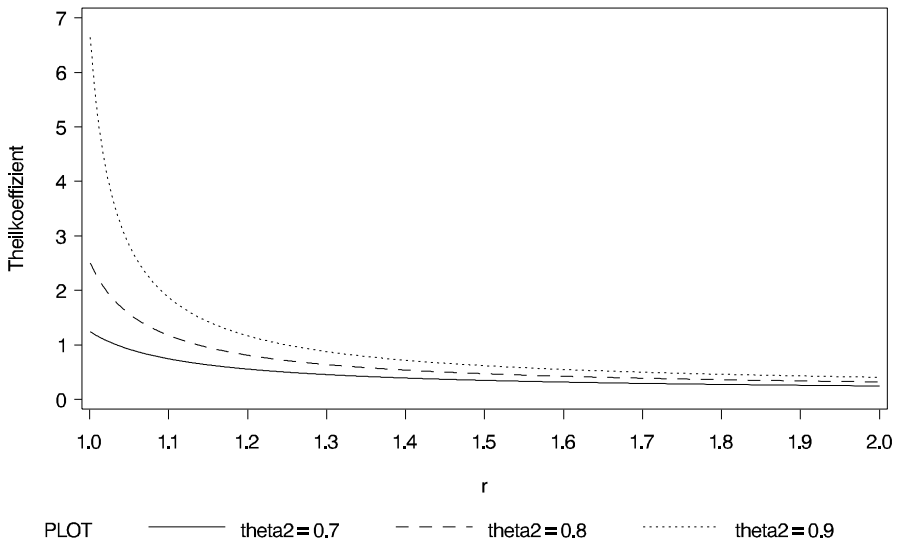

Abbildung 4.3: Theilkoeffizient T_1 mit $\theta_2 = 0.7, 0.8, 0.9$ und steigendem r

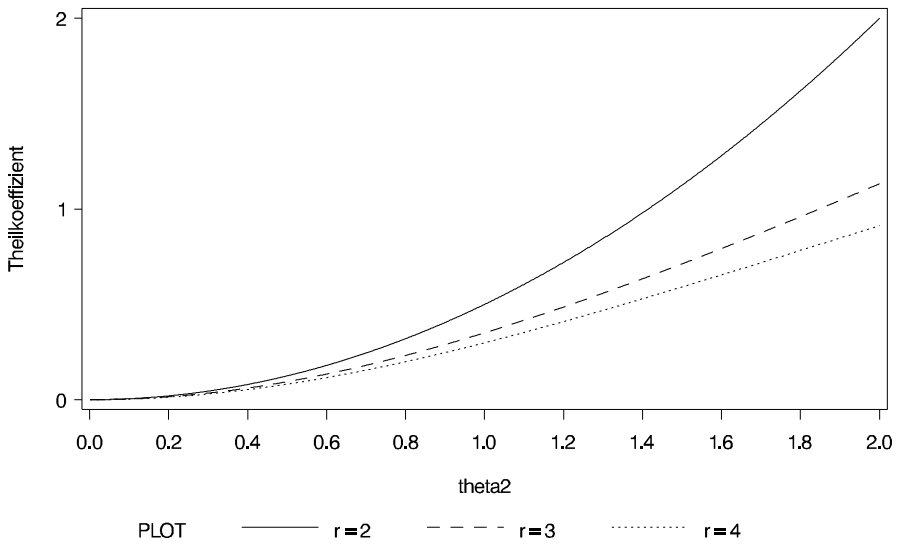

Abbildung 4.4: Theilkoeffizient T_1 mit $r = 2, 3, 4$ und steigendem θ_2

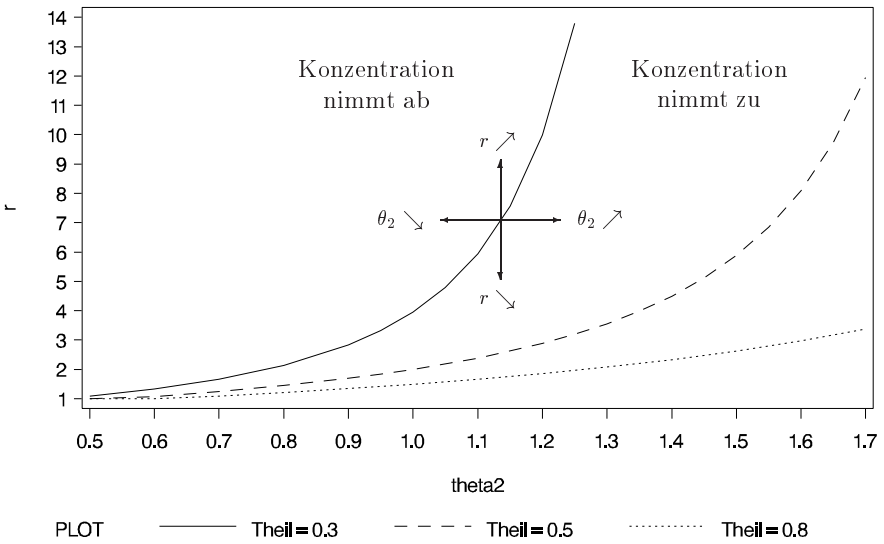

Abbildung 4.5: Wertepaare (θ_2, r) für $T_1 = 0.3$, 0.5 und 0.8

Bereiche geteilt, wobei die Ungleichheit oberhalb der Kurve ab- und unterhalb zunimmt. Abbildung 4.5 verdeutlicht das Prinzip.

Für Abbildung 4.5 werden relativ kleine Werte des Theilkoeffizienten T_1 gewählt. Das Ungleichheitsmaß T_1 kann Werte im Intervall $[0, \infty)$ annehmen. Hier werden aus Gründen der besseren graphischen Darstellung Werte kleiner als 1 untersucht (und zwar $T_1 = 0.3, 0.5$ und 0.8). Die Werte des Parameters θ_2 liegen zwischen 0.5 und 1.7, wobei im unteren Bereich in Schritten der Größe 0.1 und mit wachsenden Werten des dazugehörenden r in Schritten der Größe 0.05 vorgegangen wird. Die abgetragenen und verbundenen Tupel (θ_2, r) ergeben Abbildung 4.5. Aus den Kurven lässt sich ein exponentielles Wachstum des Parameters r in Abhängigkeit von θ_2 ablesen. Dabei beschleunigt sich das Wachstum zusätzlich, je kleiner der betrachtete Wert des Theilkoeffizienten T_1 wird.

Als Ergebnis lässt sich also festhalten: Die Ungleichheit nimmt mit steigendem Parameter θ_2 bzw. fallendem r zu. Im umgekehrten Fall nimmt sie ab. Variiert man beide Formparameter gleichzeitig, so findet sich ein exponentieller Zusammenhang zwischen r und θ_2 bei konstanten Werten des Theilkoeffizienten T_1. Der Parameterraum lässt sich in zwei Bereiche aufteilen, in denen die Ungleichheit bezüglich eines Referenzwertes von T_1 ab- bzw. zunimmt.

Kapitel 5

Schätzen und Testen der Parameter

Zur Anpassung einer Verteilung an gegebene Beobachtungen müssen die unbekannten Verteilungsparameter bestimmt werden. Die folgenden Abschnitte stellen die Momenten- und die Maximum-Likelihood-Methode für die verallgemeinerte Lognormalverteilung vor. In beiden Fällen existieren nicht für jeden Parameterschätzer geschlossene Darstellungen, was auf die Anwesenheit des Formparameters r zurückzuführen ist. Im Anschluss an die Schätzverfahren werden der Likelihood-Quotienten- sowie der Score-Test zur Überprüfung der geschätzten Parameter vorgestellt. So lässt sich beurteilen, ob die verallgemeinerte der einfachen Lognormalverteilung bezüglich der beiden Schätzverfahren vorzuziehen wäre.

In dieses Kapitel fließen eigene Berechnungen für die verallgemeinerte Lognormalverteilung ein: Es werden die Log-Likelihood-Funktion und ihre ersten und zweiten partiellen Ableitungen angegeben. Für den Score-Test muss zunächst die Informationsmatrix bestimmt werden. Aus Gründen der Konsistenz mit der vorhandenen Literatur wird auch die Informationsmatrix einer verallgemeinerten Lognormalverteilung mit Schwellenwert angegeben.

5.1 Momentenmethode

Die Momentenmethode zur Schätzung unbekannter Parameter einer Verteilung beruht auf dem Prinzip, die theoretischen Momente einer Verteilung durch die entsprechenden Stichprobenmomente zu ersetzen. Da die Momente von den unbekannten Parametern abhängen, erhält man ein Gleichungssystem, dessen Lösung die Parameterschätzer liefert. Formal gilt: Schätzt man den wahren Wert $\vartheta^\star$ des unbekannten $(m \times 1)$-Parametervektors ϑ aufgrund der Stichprobe $\{x_i : i = 1, \ldots, n\}$ und ist $g(x_i, \vartheta)$ eine stetige, vektorwertige Funktion von ϑ, deren Erwartungswert existiert und endlich ist für alle i und ϑ, so muss gelten:

$$\mathrm{E}[g(x_i, \vartheta^\star)] = 0. \tag{5.1}$$

Durch Lösen des Gleichungssystems $\mathrm{E}[g(x_i, \vartheta)] = 0$ nach ϑ würde man also gerade den wahren Wert $\vartheta^\star$ erhalten. Obiger Erwartungswert lässt sich nun schätzen durch das erste Stichprobenmoment $g_n(\vartheta)$ von $g(x_i, \vartheta)$:

$$g_n(\vartheta) := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} g(x_i, \vartheta). \tag{5.2}$$

Löst man dann das Gleichungssystem $g_n(\vartheta) = 0$, so erhält man einen Schätzer $\hat{\vartheta}$ für den wahren Vektor $\vartheta^\star$ (vgl. Mátyás, 1999, Abschnitt 1.1).

Dieses Prinzip wird nun zur Schätzung der unbekannten Parameter (θ_1, θ_2, r) einer verallgemeinerten Lognormalverteilung herangezogen. Da die Abhängigkeit ihrer Momente von den drei Parametern jedoch komplex ist, nutzt man die Eigenschaften der verallgemeinerten Normalverteilung, die bereits im Kapitel 3.1 erwähnt wurde, und bestimmt deren Schätzer mittels der Momentenmethode. Führt man diese Berechnungen mit den logarithmierten Beobachtungen einer Stichprobe durch, so erhält man die Parameterschätzer einer verallgemeinerten Lognormalverteilung.

Doch auch die verallgemeinerte Normalverteilung birgt eine Schwierigkeit: Man erhält zwar ein Gleichungssystem mit drei Gleichungen für die drei Unbekannten, jedoch lässt sich die Lösung nicht geschlossen darstellen. Daher muss zunächst der Schätzer $\hat{r}$ bestimmt werden. Dann folgen $\hat{\theta}_1$ und $\hat{\theta}_2$ gemäß der Momentenmethode: Die wahren Parameter $\theta_1^\star$ und $\theta_2^\star$ stehen mit den Momenten einer verallgemeinert normalverteilten Zufallsvariablen Y in folgendem Zusammenhang:

$$\mathrm{E}[Y] = \theta_1^\star \qquad \text{und} \qquad \mathrm{E}\left[\left|Y - \mathrm{E}[Y]\right|^r\right] = (\theta_2^\star)^r. \tag{5.3}$$

Mit $\vartheta = (\theta_1, \theta_2)'$, dem Schätzer $\hat{r}$ und der vektorwertigen Funktion $g(y_i, \vartheta)$:

$$g(y_i, \vartheta) = (y_i - \theta_1,\ |y_i - \theta_1|^r - \theta_2^r)' \tag{5.4}$$

folgen die Schätzer $\hat{\theta}_1$ und $\hat{\theta}_2$ als Lösung des Gleichungssystems $g_n(\vartheta) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n g(y_i, \vartheta) = 0$:

$$\hat{\theta}_1 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n y_i = \bar{y} \qquad \text{und} \qquad \hat{\theta}_2 = \left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n |y_i - \bar{y}|^{\hat{r}}\right]^{\frac{1}{\hat{r}}}, \tag{5.5}$$

wobei $\bar{y}$ das arithmetische Mittel der Stichprobe bezeichnet (vgl. Brunazzo und Pollastri, 1986).

Den Parameterschätzer $\hat{r}$ kann man ebenfalls mittels der Momentenmethode bestimmen. Die dabei zugrunde liegende Gleichung lässt sich jedoch nur iterativ lösen. Die Entwicklung der Gleichung sowie deren Lösung wird im Folgenden beschrieben (vgl. Brunazzo und Pollastri, 1986; Lunetta, 1963).

Lunetta (1963) gibt das p-te zentrale Absolutmoment der verallgemeinerten Normalverteilung $N_g(\theta_1, \theta_2, r)$ an als:

$$\mu_p' := \mathrm{E}[|Y - \mu|^p] = \frac{1}{r^{p/r}\,\theta_2^p}\frac{\Gamma\left(\frac{p+1}{r}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{r}\right)}. \tag{5.6}$$

Der Quotient β_p des zentralen Absolutmomentes vom Grad $2p$ und des quadrierten zentralen Absolutmomentes vom Grad p lautet:

$$\beta_p := \frac{\mu_{2p}'}{{\mu_p'}^2} = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{r}\right)\Gamma\left(\frac{2p+1}{r}\right)}{\left[\Gamma\left(\frac{p+1}{r}\right)\right]^2}. \tag{5.7}$$

Setzt man nun $p = r$, so folgt unter Ausnutzung der Eigenschaften der Gammafunktion:

$$\beta_r = \frac{\mu_{2r}'}{{\mu_r'}^2} = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{r}\right)\Gamma\left(2 + \frac{1}{r}\right)}{\left[\Gamma\left(1 + \frac{1}{r}\right)\right]^2} = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{r}\right)\left(1 + \frac{1}{r}\right)\Gamma\left(1 + \frac{1}{r}\right)}{\left[\Gamma\left(1 + \frac{1}{r}\right)\right]^2} =$$

$$= \frac{\Gamma\left(\frac{1}{r}\right)\left(1 + \frac{1}{r}\right)}{\frac{1}{r}\Gamma\left(\frac{1}{r}\right)} = \left(1 + \frac{1}{r}\right) r = r + 1. \tag{5.8}$$

Der Formparameter r lässt sich also über das Momentenverhältnis (den Formindex) β_r schätzen, indem man die zentralen Absolutmomente durch die entsprechenden empirischen Momente schätzt. Es gilt:

$$\widehat{\mu'_r} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}|y_i - \bar{y}|^r \qquad \text{und} \qquad \widehat{\mu'_{2r}} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}|y_i - \bar{y}|^{2r}. \tag{5.9}$$

Zur Lösung der Gleichung $\widehat{\mu'_{2r}} - (r+1)\widehat{\mu'_r}^{\,2} = 0$ nach r schlagen Brunazzo und Pollastri (1986) die Anwendung der Regula falsi als numerisches Iterationsverfahren vor. Die Regula falsi löst die Gleichung $h(r) = 0$ nach der Iterationsvorschrift:

$$r_{n+1} = r_n - \frac{r_n - r_m}{h(r_n) - h(r_m)}h(r_n) \tag{5.10}$$

für $n = 1, 2, \ldots$ und $m < n$. Die Startwerte r_0 und r_1 seien gegeben. Im Prinzip approximiert die Regula falsi die Kurve $y = h(r)$ durch eine Sekante im Gegensatz zum Newton-Verfahren, welches die Kurve durch eine Tangente approximiert. Unter der Bedingung, dass $h(r_m)$ jeweils ein anderes Vorzeichen als $h(r_n)$ hat, konvergiert das Verfahren sicher. Ist die Konvergenz im Verlauf der Berechnung bereits sicher, so setzt man $r_m = r_{n-1}$ ohne Rücksicht auf das Vorzeichen, was zur Beschleunigung der Konvergenz führt (vgl. Bronstein [et al.], 1997, S. 823).

Führt man nun obige Berechnungen mit den logarithmierten Werten der gegebenen Stichprobe durch, so erhält man die Parameterschätzer $\hat{\theta}_1$ und $\hat{\theta}_2$ der verallgemeinerten Lognormalverteilung mit $\hat{r}$ als:

$$\hat{\theta}_1 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\ln x_i \qquad \text{und} \qquad \hat{\theta}_2 = \left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left|\ln x_i - \hat{\theta}_1\right|^{\hat{r}}\right]^{\frac{1}{\hat{r}}} \tag{5.11}$$

(vgl. Gleichung (5.5)).

5.2 Maximum-Likelihood-Methode

Die Maximum-Likelihood-Methode ordnet einer Stichprobe $\{x_i : i = 1, \ldots, n\}$ diejenige Verteilung einer Verteilungsfamilie zu, welche unter allen Verteilungen der Familie die höchste Wahrscheinlichkeit (oder besser Plausibilität) besitzt, dass die Stichprobe gerade aus ihr stammt. Ein Maximum-Likelihood-Schätzer für den

unbekannten Parametervektor ϑ der zugrunde liegenden Verteilung ist also derjenige Wert $\hat{\vartheta}$, der die gemeinsame Dichtefunktion $f_\vartheta(x_1, \ldots, x_n)$ der Stichprobe maximiert. Fasst man die gemeinsame Dichte als eine Funktion von ϑ auf (mit den Beobachtungen $x_1, \ldots, x_n$ als Konstanten), so nennt man sie Likelihood-Funktion (vgl. Rohatgi, 1976, Abschnitt 8.7).

Unter der Annahme, dass die Stichprobe $\{x_1, \ldots, x_n\}$ die Beobachtungen von n unabhängig und identisch verteilten Zufallsvariablen $(X_1, \ldots, X_n)$ darstellt, folgt für die Likelihood-Funktion $L(\vartheta; x_1, \ldots, x_n)$:

$$L(\vartheta; x_1, \ldots, x_n) := f_\vartheta(x_1, \ldots, x_n) = \prod_{i=1}^{n} f_\vartheta(x_i). \tag{5.12}$$

Da die Maximierung der Likelihood-Funktion häufig Schwierigkeiten bereitet, wird stattdessen der Hochpunkt ihres natürlichen Logarithmus (der „Log-Likelihood-Funktion“) gesucht. Der Logarithmus ist eine streng monotone Funktion, daher führt die Extremwertbestimmung zum gleichen Ergebnis.

Sind die Zufallsvariablen X_i, $i = 1, \ldots, n$, unabhängig und identisch verteilt gemäß einer verallgemeinerten Lognormalverteilung, so lautet ihre Likelihood-Funktion mit dem Parametervektor $\vartheta = (\theta_1, \theta_2, r)'$:

$$\begin{aligned} L(\vartheta; x_1, \ldots, x_n) &= \prod_{i=1}^{n} f_\vartheta(x_i) \\ &= \prod \frac{c}{\theta_2\, x_i} \exp\left\{ -\frac{1}{r} \left| \frac{\ln x_i - \theta_1}{\theta_2} \right|^r \right\} \\ &= \left(\frac{c}{\theta_2}\right)^n \left(\prod \frac{1}{x_i} \right) \left(\exp\left\{ -\frac{1}{r} \sum \left| \frac{\ln x_i - \theta_1}{\theta_2} \right|^r \right\} \right) \end{aligned} \tag{5.13}$$

mit $c = \left[2r^{\frac{1}{r}}\, \Gamma\left(1 + \frac{1}{r}\right) \right]^{-1}$.

Daraus folgt die Log-Likelihood-Funktion als:

$$\begin{aligned} \ln L(\vartheta; x_1, \ldots, x_n) &= n\, \ln c - n\, \ln \theta_2 - \sum \ln x_i - \frac{1}{r} \sum \left| \frac{\ln x_i - \theta_1}{\theta_2} \right|^r \\ &= -n\, \ln 2 - n\, \frac{\ln r}{r} - n\, \ln \Gamma\left(1 + \frac{1}{r}\right) - \\ &\quad - n\, \ln \theta_2 - \sum \ln x_i - \frac{1}{r} \sum \left| \frac{\ln x_i - \theta_1}{\theta_2} \right|^r . \end{aligned} \tag{5.14}$$

Zur Lösung der Maximierungsaufgabe werden die partiellen Ableitungen erster und zweiter Ordnung der Log-Likelihood-Funktion benötigt. Der Gradient, das heißt der Vektor der partiellen Ableitungen erster Ordnung, besteht aus den Ausdrücken:

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \theta_1} = \frac{1}{\theta_2} \sum \left| \frac{\ln x_i - \theta_1}{\theta_2} \right|^{r-1} \operatorname{sign}(\ln x_i - \theta_1), \tag{5.15}$$

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \theta_2} = -\frac{n}{\theta_2} + \frac{1}{\theta_2^{r+1}} \sum |\ln x_i - \theta_1|^r, \tag{5.16}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \ln L}{\partial r} = {} & \frac{n \ln r}{r^2} - \frac{n}{r^2} + n \frac{1}{r^2} \Psi\left(1 + \frac{1}{r}\right) + \frac{1}{r^2} \sum \left| \frac{\ln x_i - \theta_1}{\theta_2} \right|^r - \\ & - \frac{1}{r} \sum \left| \frac{\ln x_i - \theta_1}{\theta_2} \right|^r \ln\left(\left| \frac{\ln x_i - \theta_1}{\theta_2} \right| \right), \end{aligned} \tag{5.17}$$

wobei $\operatorname{sign}(\cdot)$ die Signumfunktion und $\Psi(\cdot)$ den Funktionswert der Digammafunktion, also der ersten Ableitung der logarithmierten Gammafunktion, bezeichnen. Setzt man die partiellen Ableitungen erster Ordnung jeweils gleich 0, so ergibt nur Gleichung (5.16) eine geschlossene Lösung und es gilt:

$$\theta_2 = \left[\frac{1}{n} \sum |\ln x_i - \theta_1|^r \right]^{1/r}. \tag{5.18}$$

Ein Maximum-Likelihood-Schätzer $\hat{\vartheta}$ lässt sich also nicht geschlossen angeben. Es muss versucht werden, die Log-Likelihood-Funktion numerisch, d.h. iterativ zu maximieren. Die meisten statistischen Softwarepakete bieten Maximum-Likelihood-Prozeduren an, die auf verschiedenen Iterationsalgorithmen basieren. Als Startwerte können dabei die Schätzer aus der Momentenmethode dienen.

Der Vollständigkeit halber seien an dieser Stelle die partiellen Ableitungen zweiter Ordnung angegeben. Sie können Rechenaufwand bei der iterativen Bestimmung des Maximum-Likelihood-Schätzers sparen und werden zur Berechnung der Informationsmatrix benötigt (vgl. Abschnitt 5.4). Es gilt:

$$\frac{\partial^2 \ln L}{\partial^2 \theta_1} = \frac{1-r}{\theta_2^2} \sum \left| \frac{\ln x_i - \theta_1}{\theta_2} \right|^{r-2}, \tag{5.19}$$

$$\frac{\partial^2 \ln L}{\partial \theta_2 \, \partial \theta_1} = -\frac{r}{\theta_2^2} \sum \left| \frac{\ln x_i - \theta_1}{\theta_2} \right|^{r-1} \operatorname{sign}(\ln x_i - \theta_1), \tag{5.20}$$

$$\frac{\partial^2 \ln L}{\partial r\, \partial \theta_1} = \frac{1}{\theta_2} \sum \left| \frac{\ln x_i - \theta_1}{\theta_2} \right|^{r-1} \ln\left(\left| \frac{\ln x_i - \theta_1}{\theta_2} \right| \right) \operatorname{sign}(\ln x_i - \theta_1), \tag{5.21}$$

$$\frac{\partial^2 \ln L}{\partial^2 \theta_2} = \frac{n}{\theta_2^2} - \frac{r+1}{\theta_2^2} \sum \left| \frac{\ln x_i - \theta_1}{\theta_2} \right|^{r}, \tag{5.22}$$

$$\frac{\partial^2 \ln L}{\partial r\, \partial \theta_2} = \frac{1}{\theta_2} \sum \left| \frac{\ln x_i - \theta_1}{\theta_2} \right|^{r} \ln\left(\left| \frac{\ln x_i - \theta_1}{\theta_2} \right| \right), \tag{5.23}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \ln L}{\partial^2 r} = {} & \frac{3n}{r^3} - \frac{2n \ln r}{r^3} - \frac{n}{r^4} \Psi'\left(1 + \frac{1}{r}\right) - \frac{2n}{r^3} \Psi\left(1 + \frac{1}{r}\right) - \\ & - \frac{2}{r^3} \sum \left| \frac{\ln x_i - \theta_1}{\theta_2} \right|^{r} + \frac{2}{r^2} \sum \left| \frac{\ln x_i - \theta_1}{\theta_2} \right|^{r} \ln\left(\left| \frac{\ln x_i - \theta_1}{\theta_2} \right| \right) - \\ & - \frac{1}{r} \sum \left| \frac{\ln x_i - \theta_1}{\theta_2} \right|^{r} \left[\ln\left(\left| \frac{\ln x_i - \theta_1}{\theta_2} \right| \right) \right]^2. \end{aligned} \tag{5.24}$$

Hier bezeichnet $\Psi'(\cdot)$ den Funktionswert der Trigammafunktion, welche formal die erste Ableitung der Digammafunktion darstellt. Die Herleitungen der Ableitungen der Gamma- bzw. der logarithmierten Gammafunktion an der Stelle $\left(1 + \frac{1}{r}\right)$ befinden sich im Anhang A.7.

Im Anschluss an die Schätzung der Parameter lassen sich zahlreiche Hypothesen formulieren und überprüfen. Was im Zusammenhang mit der verallgemeinerten Lognormalverteilung besonders interessiert, ist der Vergleich zwischen der einfachen und der verallgemeinerten Variante. Daher konzentriert sich die Hypothesenformulierung auf den Formparameter r. Das Testproblem lautet im Falle der verallgemeinerten Lognormalverteilung:

$$H_0 : r = 2 \quad \text{gegen} \quad H_1 : r \neq 2. \tag{5.25}$$

Man testet nicht alle drei Parameter gleichzeitig, sondern betrachtet zusammengesetzte Hypothesen, wobei θ_1 und θ_2 abhängig von r als sogenannte Störparameter gewählt werden. In den folgenden Abschnitten werden Tests nach dem Likelihood-Quotienten- sowie dem Score-Verfahren für obiges Problem vorgestellt.

5.3 Likelihood-Quotienten-Test

Der Likelihood-Quotienten-Test basiert auf dem Vergleich der Likelihood-Funktionen im Falle der Nullhypothese sowie des Maximum-Likelihood-Schätzers und ist wie folgt definiert (vgl. Rohatgi, 1976, Abschnitt 10.2): Sei $\vartheta \in \Theta$ ein $(m \times 1)$-Parametervektor und $\mathbf{X}$ ein n-dimensionaler Zufallsvektor mit Dichtefunktion f_ϑ, so lautet der Likelihood-Quotienten-Test für das Testproblem $H_0 : \mathbf{X} \sim f_\vartheta$, $\vartheta \in \Theta_0$ gegen $H_1 : \mathbf{X} \sim f_\vartheta$, $\vartheta \in \Theta_1$ (mit $\Theta_1 = \Theta \setminus \Theta_0$):

Lehne H_0 ab, wenn gilt:

$$LQ = \frac{\sup\limits_{\vartheta \in \Theta_0} f_\vartheta(x_1, \ldots, x_n)}{\sup\limits_{\vartheta \in \Theta} f_\vartheta(x_1, \ldots, x_n)} < c_\alpha. \tag{5.26}$$

Obiger Test besitzt dann das Testniveau α, wenn gilt:

$$P_\vartheta\{LQ < c_\alpha | \vartheta \in \Theta_0\} = \alpha. \tag{5.27}$$

Verwendet man als alternative Prüfgröße $LQ^\star = -2 \ln LQ$, so ist diese neue Teststatistik unter den üblichen Regularitätsannahmen asymptotisch χ^2_m-verteilt mit m der Dimension des Parametervektors ϑ. Testet man zusammengesetzte Hypothesen, so ist $LQ^\star$ asymptotisch χ^2_p-verteilt, wobei die Anzahl der Freiheitsgrade der Anzahl der fest gewählten Parameter in der Nullhypothese entspricht (vgl. Rohatgi, 1976, S. 442). Die Nullhypothese muss dann zu einem Testniveau von $100\alpha\%$ abgelehnt werden, wenn die Prüfgröße $LQ^\star$ größer als das entsprechende $(1-\alpha)$-Quantil der χ^2_p-Verteilung ist.

Zum Vergleich der einfachen mit der verallgemeinerten Lognormalverteilung testet man die Nullhypothese $r = 2$ gegen die Alternative $r \neq 2$ bzw. die zusammengesetzten Hypothesen:

$$H_0 : \vartheta = \vartheta_0 := (\theta_1, \theta_2, 2)' \quad \text{gegen} \quad H_1 : \vartheta = \vartheta_1 := (\theta_1, \theta_2, r)' \text{ mit } r \neq 2, \tag{5.28}$$

mit θ_1 und θ_2 als Störparameter. Die resultierende Prüfgröße $LQ^\star$ ist dann asymptotisch χ^2_1-verteilt.

Die Likelihood-Funktion wird unter der Nullhypothese maximiert, indem man für das Parametertupel (θ_1, θ_2) gerade die Maximum-Likelihood-Schätzer der einfachen Lognormalverteilung wählt. Unter der Alternative müssen die Maximum-Likelihood-Schätzer der verallgemeinerten Lognormalverteilung gesucht werden.

Die Prüfgröße ergibt sich dann als die negative, doppelte Differenz zwischen Log-Likelihood-Funktion unter der Nullhypothese und unter der Alternative:

$$LQ^\star = -2\big[\ln L(\hat{\vartheta}_0; x_1, \ldots, x_n) - \ln L(\hat{\vartheta}_1; x_1, \ldots, x_n)\big]. \tag{5.29}$$

5.4 Informationsmatrix

Zur Durchführung des im nächsten Abschnitt behandelten Score-Tests sowie der Angabe asymptotischer Konfidenzintervalle benötigt man die Informationsmatrix. Ihre Elemente erhält man aus den negativen Erwartungswerten der zweiten partiellen Ableitungen der Log-Likelihood-Funktion. Mit dem Parametervektor $\vartheta = (\vartheta_1, \ldots, \vartheta_m)'$ lautet also der (i, j)-te Eintrag der Informationsmatrix $I(\vartheta)$:

$$I_{ij}(\vartheta) = -\mathrm{E}\left[\frac{\partial^2 \ln L(\vartheta; x_1, \ldots, x_n)}{\partial\vartheta_i \partial\vartheta_j}\right]. \tag{5.30}$$

Im Fall der verallgemeinerten Lognormalverteilung lässt sich die Informationsmatrix berechnen. Ist das Verfahren jedoch zu aufwendig oder existiert keine geschlossene Darstellung obiger Erwartungswerte bzw. Integrale, so kann die Informationsmatrix alternativ über die Daten $x_1, \ldots, x_n$ geschätzt werden. Der (i, j)-te Eintrag der empirischen Informationsmatrix $\hat{I}(\vartheta)$ lautet dann:

$$\hat{I}_{ij}(\vartheta) = -\frac{\partial^2 \ln L(\vartheta; x_1, \ldots, x_n)}{\partial\vartheta_i \partial\vartheta_j}. \tag{5.31}$$

Zur Berechnung der Informationsmatrix der verallgemeinerten Lognormalverteilung sind zunächst einige Überlegungen zur Mellin-Transformierten nötig. Diese Terme treten auf bei der Integration über die partiellen zweiten Ableitungen. Speziell die Ableitungen, welche die Ausdrücke $\ln\left(\left|\frac{\ln x_i - \theta_1}{\theta_2}\right|\right)^v$, $v = 1, 2$, beinhalten (vgl. Gleichungen (5.19) - (5.24)), benötigen einige Nebenrechnungen zur Mellin-Transformierten. Die Mellin-Transformierte Ξ ist definiert als:

$$\Xi(z) := \int_0^\infty u^{z-1}\xi(u)\,\mathrm{d}u. \tag{5.32}$$

Die Funktion $\xi(u)$ ist frei wählbar. Allgemein besteht der Zusammenhang:

$$\tilde{\xi}(u) = \xi(u)\,(\ln u)^v \quad \Rightarrow \quad \tilde{\Xi}(z) = \Xi^{(v)}(z) \tag{5.33}$$

mit v aus den natürlichen Zahlen (vgl. Oberhettinger, 1974, S. 11). Im Fall der verallgemeinerten Lognormalverteilung tritt für $\xi(u)$ auf:

$$\begin{aligned}&\xi(u) = \exp\left\{-au^p\right\}, \quad p > 0 \quad \Rightarrow \\ &\Xi(z) = \int_0^\infty u^{z-1}\xi(u)\ \mathrm{d}u = \frac{1}{p}\, a^{-z/p}\,\Gamma\left(\frac{z}{p}\right)\end{aligned} \tag{5.34}$$

(vgl. Oberhettinger, 1974, S. 27). Außerdem liegen wie erwähnt die Fälle $\xi(u)\,\ln u$ und $\xi(u)\,(\ln u)^2$ vor. Für obigen Ausdruck $\Xi(z)$ müssen laut Gleichung (5.33) dessen erste und zweite Ableitungen bestimmt werden, um die Informationsmatrix berechnen zu können. Es gilt dabei zunächst:

$$\Gamma\left(\frac{z}{p}\right) := \int_0^\infty \exp\{-t\}\, t^{z/p-1}\ \mathrm{d}t, \tag{5.35}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial z}\Gamma\left(\frac{z}{p}\right) &= \frac{1}{p}\int \exp\{-t\}\, t^{z/p-1}\ln t\ \mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{p}\,\frac{\partial}{\partial(z/p)}\,\Gamma\left(\frac{z}{p}\right) = \frac{1}{p}\,\Gamma'\left(\frac{z}{p}\right),\end{aligned} \tag{5.36}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2}{\partial^2 z}\Gamma\left(\frac{z}{p}\right) &= \frac{1}{p^2}\int \exp\{-t\}\, t^{z/p-1}(\ln t)^2\ \mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{p^2}\,\frac{\partial^2}{\partial^2(z/p)}\,\Gamma\left(\frac{z}{p}\right) = \frac{1}{p^2}\,\Gamma''\left(\frac{z}{p}\right).\end{aligned} \tag{5.37}$$

Nach einigen elementaren Umformungen folgen daraus die Ableitungen für obige Mellin-Transformierte:

$$\Xi'(z) = \frac{1}{p^2}\, a^{-z/p}\left[-(\ln a)\,\Gamma\left(\frac{z}{p}\right) + \Gamma'\left(\frac{z}{p}\right)\right], \tag{5.38}$$

$$\Xi''(z) = \frac{1}{p^3}\, a^{-z/p}\left[(\ln a)^2\,\Gamma\left(\frac{z}{p}\right) - 2(\ln a)\,\Gamma'\left(\frac{z}{p}\right) + \Gamma''\left(\frac{z}{p}\right)\right]. \tag{5.39}$$

Die Elemente der Informationsmatrix $I(\vartheta)$ sind wie erwähnt gerade die negativen Erwartungswerte der zweiten partiellen Ableitungen der Log-Likelihood-Funktion. Diese sind für die verallgemeinerte Lognormalverteilung in den Gleichungen (5.19) - (5.24) gegeben. Bei der Berechnung der Erwartungswerte nutzt man aus, dass die zugrunde liegenden Zufallsvariablen $X_1, \ldots X_n$ unabhängig und identisch verteilt sind. Es gilt daher:

$$\mathrm{E}\left[\sum g(X_i)\right] = n\,\mathrm{E}[g(X)], \quad \text{hier: } X \sim \Lambda_g(\theta_1, \theta_2, r). \tag{5.40}$$

Mit $s := 1 + 1/r$ und $c = \left[2\, r^{1/r}\, \Gamma(s)\right]^{-1}$ ergeben sich die Matrixelemente daher nach analoger Rechnung wie zur Bestimmung des p-ten Moments (Substitution, Auflösen des Betrages und Einsetzen der Mellin-Transformierten sowie deren Ableitungen, vgl. Anhang A.1):

$$\begin{aligned} I_{\theta_1\theta_1} &= n\,\frac{r-1}{\theta_2^2}\,\mathrm{E}\left[\left|\frac{\ln X-\theta_1}{\theta_2}\right|^{r-2}\right] \\ &= n\,\frac{r-1}{\theta_2^2}\,2c\int_0^\infty u^{r-2}\exp\left\{-\frac{1}{r}u^r\right\}\,\mathrm{d}u \\ &= n\,\frac{r-1}{\theta_2^2}\,r^{-2/r}\,\frac{\Gamma\left(1-\frac{1}{r}\right)}{\Gamma(s)}, \end{aligned} \tag{5.41}$$

$$\begin{aligned} I_{\theta_1\theta_2} &= n\,\frac{r}{\theta_2^2}\,\mathrm{E}\left[\left|\frac{\ln X-\theta_1}{\theta_2}\right|^{r-1}\operatorname{sign}(\ln X-\theta_1)\right] \\ &= n\,\frac{r}{\theta_2^2}\,c\int_{-\infty}^\infty |u|^{r-1}\operatorname{sign}(u\theta_2)\exp\left\{-\frac{1}{r}|u|^r\right\}\,\mathrm{d}u \\ &= n\,\frac{r}{\theta_2^2}\,c\left[\int_0^\infty u^{r-1}\exp\left\{-\frac{1}{r}u^r\right\}\,\mathrm{d}u-\int_0^\infty u^{r-1}\exp\left\{-\frac{1}{r}u^r\right\}\,\mathrm{d}u\right] \\ &= 0, \end{aligned} \tag{5.42}$$

$$I_{\theta_1 r} = 0 \quad \text{analog}, \tag{5.43}$$

$$\begin{aligned} I_{\theta_2\theta_2} &= -\frac{n}{\theta_2^2}+n\,\frac{r+1}{\theta_2^2}\,\mathrm{E}\left[\left|\frac{\ln X-\theta_1}{\theta_2}\right|^{r}\right] \\ &= -\frac{n}{\theta_2^2}+n\,\frac{r+1}{\theta_2^2}\,2c\int_0^\infty u^r\exp\left\{-\frac{1}{r}u^r\right\}\,\mathrm{d}u \\ &= \frac{n\,r}{\theta_2^2}, \end{aligned} \tag{5.44}$$

$$\begin{aligned} I_{\theta_2 r} &= -\frac{n}{\theta_2}\,\mathrm{E}\left[\left|\frac{\ln X-\theta_1}{\theta_2}\right|^{r}\ln\left(\left|\frac{\ln X-\theta_1}{\theta_2}\right|\right)\right] \\ &= -\frac{n}{\theta_2}\,2c\int_0^\infty u^r\,\ln(u)\exp\left\{-\frac{1}{r}u^r\right\}\,\mathrm{d}u \\ &= -\frac{n}{\theta_2}\,2c\frac{1}{r^2}\left(\frac{1}{r}\right)^{-s}\left[\ln r\,\Gamma(s)+\Gamma'(s)\right] \\ &= -\frac{n}{\theta_2 r}\left[\ln r+\Psi(s)\right]. \end{aligned} \tag{5.45}$$

Schließlich folgt mit:

$$\mathrm{E}\left[\left|\frac{\ln X-\theta_1}{\theta_2}\right|^r\right]=1, \tag{5.46}$$

$$\mathrm{E}\left[\left|\frac{\ln X-\theta_1}{\theta_2}\right|^r \ln\left(\left|\frac{\ln X-\theta_1}{\theta_2}\right|\right)\right]=\frac{1}{r}\left[\ln r+\Psi(s)\right] \qquad \text{und} \tag{5.47}$$

$$\mathrm{E}\left[\left|\frac{\ln X-\theta_1}{\theta_2}\right|^r \ln\left(\left|\frac{\ln X-\theta_1}{\theta_2}\right|\right)^2\right]=\frac{1}{r^2}\left[\left(\ln r+\Psi(s)\right)^2+\Psi'(s)\right] \tag{5.48}$$

$$\Rightarrow \qquad I_{rr}=\frac{n}{r^3}\left[s\,\Psi'(s)+\left(\ln r+\Psi(s)\right)^2-1\right]. \tag{5.49}$$

Mit $s=1+1/r$ und $B:=\ln r+\Psi(s)$ lautet die Informationsmatrix $I(\vartheta)$ für den Parametervektor $\vartheta=(\theta_1,\theta_2,r)'$ also:

$$I(\vartheta)=n\begin{pmatrix} \dfrac{(r-1)\,\Gamma\left(1-\frac{1}{r}\right)}{\theta_2^2\,r^{2/r}\,\Gamma(s)} & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{r}{\theta_2^2} & -\dfrac{B}{\theta_2 r} \\ 0 & -\dfrac{B}{\theta_2 r} & \dfrac{s\,\Psi'(s)+B^2-1}{r^3} \end{pmatrix}. \tag{5.50}$$

Daraus folgt die Inverse $I^{-1}(\vartheta)$ der Informationsmatrix (und damit die asymptotische Kovarianzmatrix der Parameterschätzer) als:

$$I^{-1}(\vartheta)=\frac{1}{n}\begin{pmatrix} \dfrac{\theta_2^2\,r^{2/r}\,\Gamma(s)}{(r-1)\,\Gamma\left(1-\frac{1}{r}\right)} & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{\theta_2^2}{r}\left[1+\dfrac{B^2}{s\,\Psi'(s)-1}\right] & \dfrac{\theta_2\,r\,B}{s\,\Psi'(s)-1} \\ 0 & \dfrac{\theta_2\,r\,B}{s\,\Psi'(s)-1} & \dfrac{r^3}{s\,\Psi'(s)-1} \end{pmatrix}. \tag{5.51}$$

Es lässt sich festhalten, dass die Informationsmatrizen der verallgemeinerten Normal- und der verallgemeinerten Lognormalverteilung identisch sind. Aus dem Vergleich der entsprechenden Log-Likelihood-Funktionen für jeweils n unabhängig

und identisch verteilte Zufallsvariablen $Y_i \sim N_g(\theta_1, \theta_2, r)$ bzw. $X_i \sim \Lambda_g(\theta_1, \theta_2, r)$ folgt die Gleichheit sofort, denn es gilt:

$$\begin{aligned} \ln L(\vartheta; y_1, \ldots, y_n) = -n \ln 2 - n \frac{\ln r}{r} - n \ln \Gamma\left(1 + \frac{1}{r}\right) - \\ - n \ln \theta_2 - \frac{1}{r} \sum \left| \frac{y_i - \theta_1}{\theta_2} \right|^r , \end{aligned} \tag{5.52}$$

$$\begin{aligned} \ln L(\vartheta; x_1, \ldots, x_n) = -n \ln 2 - n \frac{\ln r}{r} - n \ln \Gamma\left(1 + \frac{1}{r}\right) - \\ - n \ln \theta_2 - \sum \ln x_i - \frac{1}{r} \sum \left| \frac{\ln x_i - \theta_1}{\theta_2} \right|^r . \end{aligned} \tag{5.53}$$

Der Term $-\sum \ln x_i$ in Gleichung (5.53) entfällt bei der partiellen Integration nach $\vartheta = (\theta_1, \theta_2, r)'$ immer. Die partiellen Ableitungen (auch höherer Ordnung) sind daher für beide Verteilungen identisch bis auf die Behandlung der Beobachtungen ($y_i \leftrightarrow \ln x_i$). Bei der Erwartungswertbildung spielt dieser Unterschied jedoch keine Rolle mehr, da nur Erwartungswerte mit den Ausdrücken $\left|\frac{\ln X - \theta_1}{\theta_2}\right|$ bzw. $\left|\frac{Y - \theta_1}{\theta_2}\right|$ bestimmt werden müssen. Diese fallen aber nach Substitution mit $U = \frac{\ln X - \theta_1}{\theta_2}$ bzw. $U = \frac{Y - \theta_1}{\theta_2}$ auf Erwartungwerte von $|U|$ zusammen. Die resultierenden Informationsmatrizen sind identisch für beide Verteilungen. Somit gibt obige Matrix (5.51) die asymptotische Kovarianzmatrix der Parameterschätzer für die verallgemeinerte Normal- und für die verallgemeinerte Lognormalverteilung an. Beide Matrizen werden in der vorhandenen Literatur nicht erwähnt.

Vergleicht man die Inverse der Informationsmatrix im Fall $r = 2$ mit den Werten der asymptotischen Varianzen und Kovarianzen der Parameterschätzer für die einfache Lognormalverteilung, so sind die einzelnen Größen nicht identisch. Insbesondere ist die Kovarianz zwischen $\hat{\theta}_1$ und $\hat{\theta}_2$ ungleich 0 (vgl. Cohen und Whitten, 1988, S. 64). Dieses Phänomen ist dadurch zu erklären, dass hier die Informationsmatrix für eine einfache Lognormalverteilung mit Schwellenwert λ berechnet wurde (vgl. auch Abschnitt 2.1). Dies bedingt zusätzliche Ableitungen der Log-Likelihood-Funktion. Dadurch ist nach der Invertierung der Informationsmatrix die Kovarianz zwischen $\hat{\theta}_1$ und $\hat{\theta}_2$ ungleich 0 (für alle zulässigen Werte des Parameters λ). Geht man also von einer Verteilung ohne Schwellenwert aus, so ist es falsch, in der inversen Informationsmatrix der Verteilung mit Schwellenwert diesen einfach auf 0 zu setzen, um die (Ko-)Varianzen abzulesen.

Im Fall der verallgemeinerten Lognormalverteilung mit Schwellenwert lässt sich die Informationsmatrix ebenfalls bestimmen. Obwohl die Verteilung in dieser

Diplomarbeit nicht behandelt wird, sollen an dieser Stelle kurz die Ergebnisse erwähnt werden, um Konsistenz mit der vorhandenen Literatur zu wahren. Die Herleitung befindet sich im Anhang A.8.

Die Dichte f einer verallgemeinert lognormalverteilten Zufallsvariablen X mit dem Parametertupel $(\theta_1, \theta_2, r, \lambda)$ und bekanntem Faktor c sei definiert als:

$$f(x|\theta_1,\theta_2,r,\lambda) := \begin{cases} \dfrac{c}{\theta_2(x-\lambda)} \exp\left\{-\dfrac{1}{r}\left|\dfrac{\ln(x-\lambda)-\theta_1}{\theta_2}\right|^r\right\} & x > \lambda \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \tag{5.54}$$

Dann setzt sich die zugehörige (4×4)-Informationsmatrix zusammen aus den Größen der Matrix (5.50) und den zusätzlichen Größen:

$$I_{\theta_1\lambda} = \frac{n\,(r-1)}{\theta_2^2\,\exp\{\theta_1\}\,r^{2/r}\,\Gamma\left(1+\frac{1}{r}\right)} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\theta_2^{2i}}{(2i)!} r^{2i/r} \Gamma\left(1+\frac{2i-1}{r}\right), \tag{5.55}$$

$$I_{\theta_2\lambda} = -\frac{n\,r}{\theta_2\,\exp\{\theta_1\}\,\Gamma\left(1+\frac{1}{r}\right)} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\theta_2^{2i}}{(2i+1)!} r^{2i/r} \Gamma\left(1+\frac{2i+1}{r}\right), \tag{5.56}$$

$$\begin{aligned} I_{r\lambda} = \frac{n}{\exp\{\theta_1\}\,\Gamma\left(\frac{1}{r}\right)} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\theta_2^{2i}}{(2i+1)!} r^{2i/r} \cdot \\ \cdot \left[\ln(r)\,\Gamma\left(1+\frac{2i+1}{r}\right) + \Gamma'\left(1+\frac{2i+1}{r}\right)\right], \end{aligned} \tag{5.57}$$

$$\begin{aligned} I_{\lambda\lambda} = \frac{n}{\exp\{2\theta_1\}\,\Gamma\left(\frac{1}{r}\right)} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(2\theta_2)^{2i}}{(2i)!} r^{2i/r} \cdot \\ \cdot \left[\Gamma\left(\frac{2i+1}{r}\right) + \frac{r-1}{\theta_2^2\,r^{2/r-1}} \Gamma\left(1+\frac{2i-1}{r}\right)\right], \end{aligned} \tag{5.58}$$

wobei $\Gamma'(\cdot)$ den Funktionswert der Ableitung der Gammafunktion bezeichnet. Invertiert man nun die gesamte Matrix, so sind alle Varianzen und Kovarianzen ungleich 0 (im Gegensatz zur verallgemeinerten Lognormalverteilung ohne Schwellenwert, vgl. Matrix (5.51)).

Zur Rechenprobe vereinfacht man die gesamte Informationsmatrix mit $r = 2$. Nach Reduktion um alle Elemente $I_{r\cdot}$ und Invertierung der entstandenen (3×3)-Matrix erhält man die für die einfache Lognormalverteilung (mit Schwellenwert) angegebenen Werte der asymptotischen Kovarianzmatrix aus Cohen und Whitten (1988, S. 64).

Der im folgenden Abschnitt beschriebene Score-Test wird für die verallgemeinerte Lognormalverteilung ohne Schwellenwert durchgeführt und verwendet daher die Informationsmatrix (5.50) bzw. deren Inverse (5.51).

5.5 Score-Test

Der Score-Test (auch Lagrange-Multiplier-Test) basiert auf den ersten partiellen Ableitungen der Log-Likelihood-Funktion („efficient scores"). Da der Maximum-Likelihood-Schätzer $\hat{\vartheta}$ durch Maximierung der Log-Likelihood-Funktion bestimmt wird, sollten die ersten partiellen Ableitungen an der Stelle $\hat{\vartheta}$ möglichst nahe bei 0 liegen. Ist dies nicht der Fall, wäre die Nullhypothese abzulehnen.

Sei nun $S(\vartheta)$ der $(m \times 1)$-Vektor aus den Score-Funktionen $S_i(\theta) = \partial \ln L / \partial \vartheta_i$ mit dem Parametervektor $\vartheta = (\vartheta_1, \ldots, \vartheta_m)'$ und $I(\vartheta)$ die zugehörige Informationsmatrix. Dann gilt für den wahren Parameter $\vartheta^\star$:

$$\mathrm{E}[S(\vartheta^\star)] = 0 \quad \text{und} \quad \mathrm{cov}\{S(\vartheta^\star)\} = I^{-1}(\vartheta^\star). \tag{5.59}$$

Ist die Stichprobe groß, so ist der Score-Vektor $S(\vartheta^\star)$ asymptotisch multivariat normalverteilt mit Erwartungswert 0 und Kovarianzmatrix $I^{-1}(\vartheta^\star)$. Für die einfache Nullhypothese $H_0 : \vartheta = \vartheta_0$ ergibt sich daher die Prüfgröße X^2:

$$X^2 = S(\hat{\vartheta}_0)' \; I^{-1}(\hat{\vartheta}_0) \; S(\hat{\vartheta}_0) \overset{\text{asympt.}}{\sim} \chi^2_m. \tag{5.60}$$

Der Score- und der Likelihood-Quotienten-Test sind (ebenso wie der Wald-Test) asymptotisch äquivalent (vgl. Cox und Hinkley, 1974, Abschnitt 9.3.2).

Im Falle der verallgemeinerten Lognormalverteilung interessiert die zusammengesetzte Hypothese $H_0 : \vartheta = \vartheta_0 = (\theta_1, \theta_2, 2)'$, wobei θ_1 und θ_2 als Störparameter angesehen werden. Betrachtet man nun die partielle Ableitung nach r an der Stelle des Maximum-Likelihood-Schätzers $\hat{\vartheta}_0$, also $S_r(\hat{\vartheta}_0)$, so lautet die Prüfgröße $\tilde{X}^2$ im zusammengesetzten Fall:

$$\tilde{X}^2 = S_r(\hat{\vartheta}_0)' \; I_r^{-1}(\hat{\vartheta}_0) \; S_r(\hat{\vartheta}_0) \overset{\text{asympt.}}{\sim} \chi^2_1. \tag{5.61}$$

Für $I_r(\hat{\vartheta}_0)$ gilt mit den Elementen der Informationsmatrix (5.50):

$$I_r(\hat{\vartheta}_0) = I_{\hat{r}\hat{r}} - \begin{pmatrix} I_{\hat{r}\hat{\theta}_1} & I_{\hat{r}\hat{\theta}_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_{\hat{\theta}_1\hat{\theta}_1} & I_{\hat{\theta}_1\hat{\theta}_2} \\ I_{\hat{\theta}_2\hat{\theta}_1} & I_{\hat{\theta}_2\hat{\theta}_2} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} I_{\hat{r}\hat{\theta}_1} \\ I_{\hat{r}\hat{\theta}_2} \end{pmatrix} \tag{5.62}$$

(vgl. Cox und Hinkley, 1974, Abschnitt 9.9.3).

Aus der asymptotischen Normalverteilung des Maximum-Likelihood-Schätzers $\hat{r}$ mit Erwartungswert $r^\star$ und Varianz $I_r^{-1}(\hat{\vartheta}_0)$ lassen sich asymptotische $(1-\alpha)$-Konfidenzintervalle $KI(r^\star)$ für den wahren Formparameter $r^\star$ ableiten und es gilt:

$$KI(r^\star) = \left[\hat{r} - u_{1-\alpha/2}\sqrt{I_r^{-1}(\hat{\vartheta}_0)}\,,\, \hat{r} + u_{1-\alpha/2}\sqrt{I_r^{-1}(\hat{\vartheta}_0)} \right], \tag{5.63}$$

wobei $u_{1-\alpha/2}$ das $\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)$-Quantil der Standardnormalverteilung bezeichne (vgl. Cox und Hinkley, 1974, Abschnitt 9.3.7).

Im folgenden Kapitel werden die beschriebenen Verfahren auf einen echten Datensatz angewandt. Es handelt sich dabei um eine Einkommensstichprobe, an die eine einfache und eine verallgemeinerte Lognormalverteilung angepasst werden sollen. An geeigneter Stelle finden sich Tests zur Überprüfung der Anpassungsgüte.

Kapitel 6

Anwendung der Verfahren auf eine Einkommensstichprobe

Der im Folgenden behandelte Datensatz entstammt der Einkommens- und Verbrauchsstichprobe (EVS), die das Statistische Bundesamt im Jahr 1993 durchgeführt hat. Dabei wurden 0.2% aller privaten Haushalte im gesamten Bundesgebiet befragt. Dies entspricht einer Zahl von ca. 56 000 Haushalten, wovon 40 230 hinsichtlich ihrer Einnahmen und Ausgaben erfasst werden konnten. Der vorliegende Datensatz besteht aus der Reihe „Ausgabefähiges Einkommen und Einnahmen“ (Angaben in DM), welche sich wie folgt zusammensetzt (vgl. Statistisches Bundesamt, 1995):

Einkommen aus Erwerbstätigkeit
+ Einnahmen aus Vermögen
+ Einnahmen aus laufenden Übertragungen
+ Einnahmen aus einmaligen und unregelmäßigen Übertragungen
+ Einnahmen aus Untervermietung und aus dem Verkauf von Waren
+ Sonstige Einnahmen
− Lohn-, Einkommens-, Vermögens- und Kirchensteuer
− Sonstige Einkommens- und Vermögenssteuern
− Pflichtbeiträge zur gesetzlichen Renten- und Krankenversicherung
− Pflichtbeiträge zur Arbeitsförderung.

Der Graph der Kerndichteschätzung dieser Datenreihe lässt eine Lognormalverteilung vermuten (vgl. Abbildung 6.1, S. 59, „Empirische Dichte“). Es soll nun

untersucht werden, ob die verallgemeinerte Lognormalverteilung eine bessere Anpassung liefert und ob man die einfache zugunsten der verallgemeinerten Lognormalverteilung ablehnen kann. Die computergestützten Berechnungen wurden mit Hilfe der Software SAS durchgeführt (vgl. SAS Institute Inc., 1999). Die entsprechenden Programme befinden sich im Anhang D.

6.1 Parameterschätzung

Unter den 40 230 Beobachtungen des EVS-Datensatzes befinden sich zwei negative Werte sowie der Wert 0. Da die Berechnungen der Parameterschätzer mit den logarithmierten Werten durchgeführt werden, müssen diese drei Beobachtungen ausgeschlossen werden. Es bleiben 40 227 Beobachtungen mit Minimum 187 und Maximum 547 931 übrig.

Da der Vergleich zwischen der einfachen und der verallgemeinerten Lognormalverteilung interessiert, werden zunächst die Maximum-Likelihood-Schätzer $\hat{\theta}_1$ und $\hat{\theta}_2$ einer einfachen Lognormalverteilung bestimmt. Dabei ist $\hat{\theta}_1$ der Mittelwert und $\hat{\theta}_2$ die empirische Standardabweichung der logarithmierten Werte (vgl. Abschnitt 2.1). Als Schätzer erhält man $\hat{\theta}_1 \approx 10.9568$ und $\hat{\theta}_2 \approx 0.5920$. Abbildung 6.1 zeigt die daraus resultierende Dichte der einfachen Lognormalverteilung zusammen mit der Kerndichteschätzung für die EVS-Daten.

Die Dichte der Lognormalverteilung stimmt mit der empirischen Dichte zu Anfang sowie gegen Ende der Werte gut überein. Die theoretische Dichte ist jedoch höher und schmaler als die empirische (vgl. Abbildung 6.1). Die einfache Lognormalverteilung besitzt den Formparameter $r = 2$. Eine angepasste verallgemeinerte Lognormalverteilung sollte daher einen kleineren Parameter $\hat{r}$ haben, was ihre Dichte niedriger und breiter ausfallen lässt.

Bei der Parameterschätzung mit Hilfe der Momentenmethode muss wie in Abschnitt 5.1 beschrieben zuerst der Schätzer $\hat{r}$ iterativ bestimmt werden. Die Regula falsi mit den Startwerten $r_0 = 1$ und $r_1 = 3$ gibt den Schätzer $\hat{r}$ als $\hat{r} \approx 1.8487$ an. Damit folgt der Schätzer $\hat{\theta}_2 \approx 0.5752$ (und $\hat{\theta}_1$ weiterhin als arithmetisches Mittel $\hat{\theta}_1 \approx 10.9568$). Die statistische Software SAS stellt die Optimierungsprozedur `proc nlp` („non-linear programming“) zur Verfügung, welche die Maximum-Likelihood-Schätzung ermöglicht (vgl. SAS Institute Inc., 1999). Das dabei be-

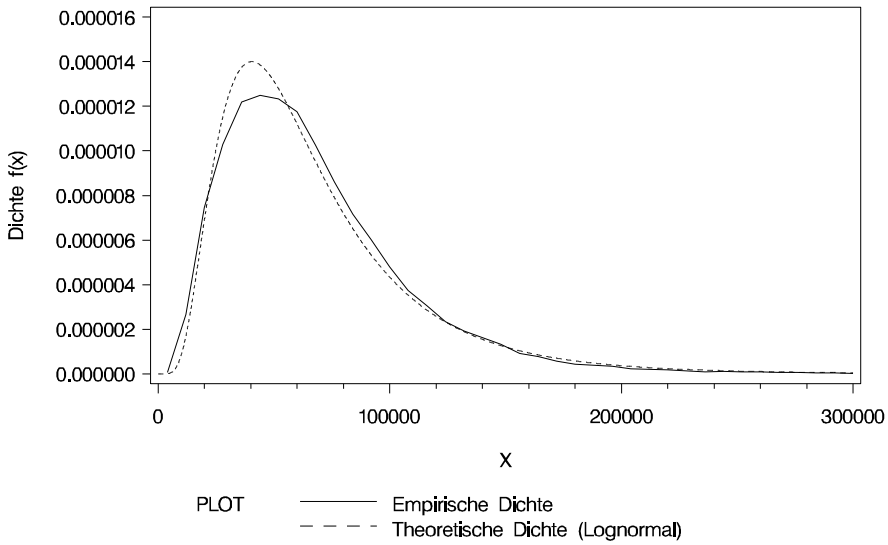

Abbildung 6.1: Dichtefunktionen der EVS-Daten und der angepassten einfachen Lognormalverteilung

nutzte Iterationsverfahren nach Newton-Raphson (ohne Startwerte) liefert als Ergebnisse die Schätzer $\hat{\theta}_1 \approx 10.9589$, $\hat{\theta}_2 \approx 0.5839$ und $\hat{r} \approx 1.9266$. Tabelle 6.1 stellt die Ergebnisse noch einmal gemeinsam dar.

Die neuen Formparameter der Verteilungen sind wie erwartet kleiner als 2. Dadurch sollten die zugehörigen Dichten niedriger und breiter verlaufen (und die Daten graphisch besser anpassen). Tatsächlich liegen die Dichten der beiden verallgemeinerten Lognormalverteilungen jedoch nah an der Dichte der einfachen Lognormalverteilung. Lediglich in ihrer Breite unterscheiden sie sich, die Höhe bleibt nahezu unverändert. Abbildung 6.2 gibt die drei Dichten im Intervall von

Tabelle 6.1: Parameterschätzer der EVS-Daten

Verteilung	$\hat{\theta}_1$	$\hat{\theta}_2$	$\hat{r}$
Einfache Lognormalverteilung	10.9568	0.5920	(2.0000)
Λ_g-Verteilung (Momentenmethode)	10.9568	0.5752	1.8487
Λ_g-Verteilung (ML-Methode)	10.9589	0.5839	1.9266

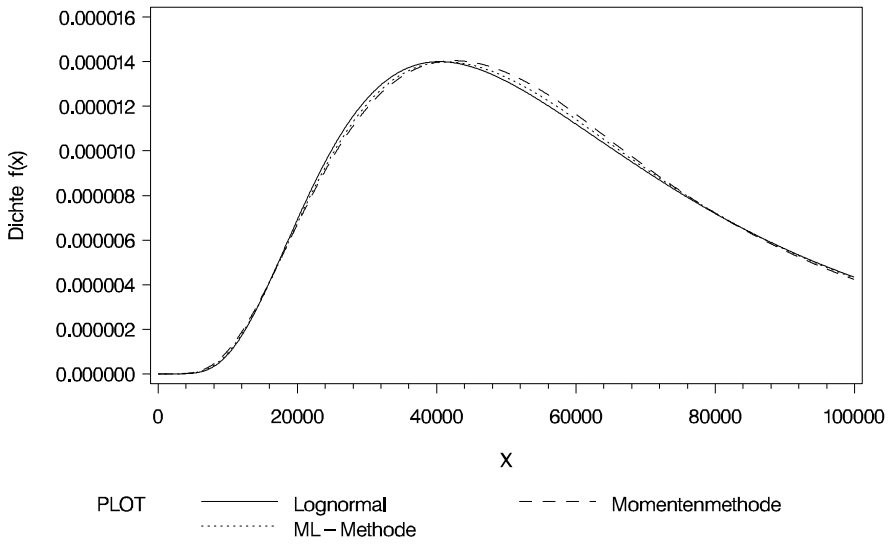

Abbildung 6.2: Dichtefunktionen der angepassten Verteilungen im Vergleich

0 bis 100 000 wieder. Es zeigt sich, dass die Höhen der drei Dichten fast gleich sind, der Modalwert zunimmt (der größte bei der Momentenmethode) und die Dichten im Bereich um den Modalwert herum etwas breiter werden (auch hier die größte Verbreiterung bei der Momentenmethode). Abbildung 6.3 schließlich zeigt die empirische Dichte gemeinsam mit der durch die Momentenmethode angepassten verallgemeinerten Lognormalverteilung.

Es stellt sich nun die Frage, wie gut die Daten durch die verschiedenen Verteilungen angepasst werden und welche der Verteilungen die beste Anpassung liefert. Der folgende Abschnitt stellt daher die gebräuchlichsten Anpassungstests vor und gibt die Anpassungsgüte obiger Verteilungen wieder.

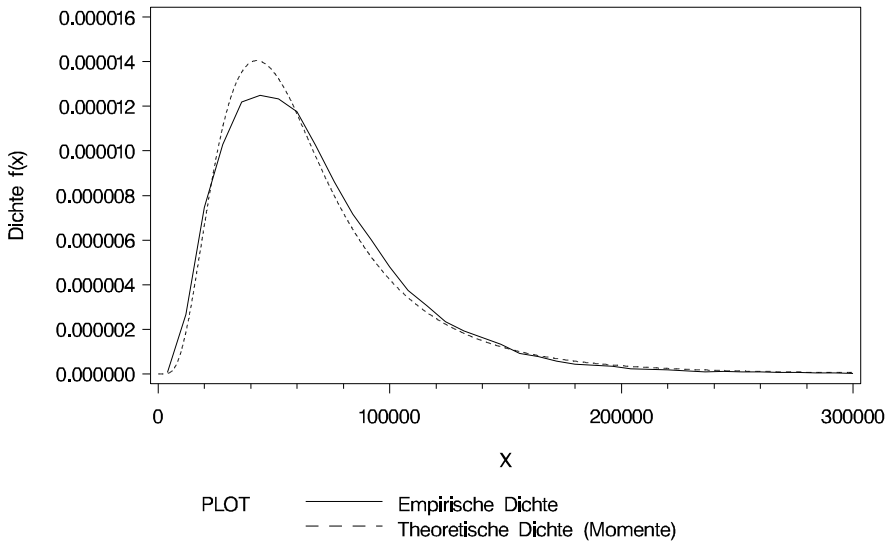

Abbildung 6.3: Dichtefunktionen der EVS-Daten und der mittels Momentenmethode angepassten verallgemeinerten Lognormalverteilung

6.2 Güte der Anpassung

Im Anschluss an die Parameterschätzung aufgrund einer Stichprobe muss überprüft werden, wie gut die Daten durch die theoretische Verteilung angepasst werden. Formal lauten die Hypothesen:

$$H_0 : F_X(x) = F_0(x|\hat{\vartheta}) \quad \text{gegen} \quad H_1 : F_X(x) \neq F_0(x|\hat{\vartheta}), \tag{6.1}$$

wobei F_X die empirische und F_0 die theoretische Verteilungsfunktion bezeichnen. In letztere geht der geschätzte Parametervektor $\hat{\vartheta}$ ein.

Im Folgenden werden der χ^2- und der Kolmogorov-Smirnov-Test vorgestellt, welche die Standardverfahren zur Feststellung der Anpassungsgüte sind. Anschließend werden die verschiedenen Anpassungen des EVS-Datensatzes überprüft.

χ^2-Anpassungstest

Der χ^2-Anpassungstest eignet sich für große Stichproben und überprüft obige Hypothesen (6.1), indem er die empirischen mit den theoretischen absoluten Häufigkeiten vergleicht. Ist die Stichprobe in k Klassen eingeteilt, so lautet die Teststatistik χ^2:

$$\chi^2 := \sum_{j=1}^{k} \frac{(n_j - n_j^\star)^2}{n_j^\star}, \tag{6.2}$$

wobei n_j die empirische absolute Häufigkeit in der j-ten Klasse und $n_j^\star$ die theoretische absolute Häufigkeit in der j-ten Klasse bezeichnen. Dabei ist zu beachten, dass jede der k Klassen mit mindestens zehn Beobachtungen besetzt ist. Die theoretische, also geschätzte absolute Häufigkeit darf in keiner Klasse kleiner als 1 und in höchstens 20% der Klassen kleiner als 5 sein. Ist dies nicht der Fall, so muss eine andere Gruppierung gewählt werden. Die Anzahl der Klassen ist beliebig, jedoch größer als 1 zu wählen. Die theoretischen Häufigkeiten erhält man aus der gewählten Verteilung mit dem geschätzten Parametervektor $\hat{\vartheta}$.

Ist z die Anzahl der geschätzten Parameter, so lehnt man die Nullhypothese auf dem Signifikanzniveau α ab, wenn gilt:

$$\chi^2 > \chi^2_{k-z-1,1-\alpha} \tag{6.3}$$

(vgl. Rinne, 1997, S. 552f.).

Kolmogorov-Smirnov-Anpassungstest

Der Anpassungstest nach Kolmogorov und Smirnov arbeitet statt mit den absoluten Häufigkeiten wie der χ^2-Test mit den kumulierten relativen Häufigkeiten, also den empirischen Verteilungsfunktionen. Nach Bildung der geordneten Stichprobe $\{x_{(i)} : i = 1, \ldots, n\}$ aus den ursprünglichen Beobachtungen $\{x_i : i = 1, \ldots, n\}$ erhält man die empirische Verteilungsfunktion F_n:

$$F_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < x_{(1)} \\ i/n & \text{für } x_{(i)} \leq x < x_{(i+1)},\ i = 1, \ldots, n-1 \\ 1 & \text{für } x \geq x_{(n)}. \end{cases} \tag{6.4}$$

Die Prüfgröße KS ist nun der maximale absolute Abstand zwischen der empirischen und der theoretischen Verteilungsfunktion über alle Werte x aus der Stichprobe:

$$KS := \max_x |F_n(x) - F_0(x)|. \tag{6.5}$$

Sind die Parameter unbekannt, so erhält man die theoretische Verteilungsfunktion F_0, indem sie aus der gewählten Verteilung mit den geschätzten Parametern berechnet wird. Dadurch wird der Test jedoch konservativ.

Die Nullhypothese ist auf dem Signifikanzniveau α abzulehnen, wenn gilt:

$$KS > \Delta_{n,1-\alpha/2}. \tag{6.6}$$

Die kritischen Werte $\Delta_{n,1-\alpha/2}$ sind vertafelt (vgl. Rinne, 1997, S. 553 und S. 595f.).

Anpassungsgüte der EVS-Daten

Die EVS-Daten werden einmal nach der herkömmlichen Methode, also mit der einfachen Lognormalverteilung, und zweimal mit der verallgemeinerten Variante angepasst. Die Parameterschätzer werden dabei mit der Momenten- sowie der Maximum-Likelihood-Methode bestimmt. Es stellt sich nun die Frage, ob die Stichprobe gut durch diese drei Verteilungsmodelle angepasst werden kann. Es interessiert zudem, welche der Verteilungen die beste Anpassung liefert.

Zunächst sind jedoch einige formale Überlegungen nötig, um obige Anpassungstests durchführen zu können. Teilt man die n Beobachtungen in k Klassen ein, so erhält man leicht die absolute Klassenhäufigkeit n_j $(j = 1, \ldots, n)$, die relative Klassenhäufigkeit $f_j := n_j/n$ sowie die kumulierte relative Klassenhäufigkeit F_j. Die entsprechenden theoretischen Werte abhängig vom jeweiligen geschätzten Parametervektor ergeben sich aus den folgenden Zusammenhängen: Sei x_u die untere und x_o die obere Klassengrenze einer beliebigen Klasse j. Für die theoretische relative Klassenhäufigkeit $f_j^\star$ gilt dann:

$$f_j^\star := P(x_u < x < x_o) = \int_{x_u}^{x_o} f(t)\ \mathrm{d}t. \tag{6.7}$$

Für eine verallgemeinert lognormalverteilte Zufallsvariable $X \sim \Lambda_g(\theta_1, \theta_2, r)$ folgt aus obiger Gleichung:

$$\begin{aligned} f_j^\star &= \int_{x_u}^{x_o} \frac{c}{\theta_2 t} \exp\left\{ -\frac{1}{r} \left| \frac{\ln t - \theta_1}{\theta_2} \right|^r \right\} \, \mathrm{d}t \\ &= c \int_{y_u}^{y_o} \exp\left\{ -\frac{1}{r} |u|^r \right\} \, \mathrm{d}u = c \int_{y_u}^{y_o} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!} \left(-\frac{|u|^r}{r} \right)^i \, \mathrm{d}u \\ &= c \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i}{i!\, r^i} \int_{y_u}^{y_o} |u|^{ri} \, \mathrm{d}u \end{aligned} \tag{6.8}$$

mit dem bekannten Faktor $c = \left[2\, r^{1/r}\, \Gamma\left(1 + \frac{1}{r}\right) \right]^{-1}$ und nach Substitution mit $u = \frac{\ln t - \theta_1}{\theta_2}$ sowie mit den transformierten Klassengrenzen $y_u := \frac{\ln(x_u) - \theta_1}{\theta_2}$ und $y_o := \frac{\ln(x_o) - \theta_1}{\theta_2}$. Das letzte der obigen Integrale muss abhängig von den Vorzeichen der Integralgrenzen bestimmt werden, was nach einer Fallunterscheidung zu folgenden Ergebnissen führt:

$$f_j^\star = c \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i}{i!\, r^i} \, \frac{1}{ri+1} \cdot \begin{cases} \left(|y_u|^{ri+1} - |y_o|^{ri+1} \right) & \text{für } y_u, y_o < 0 \\ \left(y_o^{ri+1} - y_u^{ri+1} \right) & \text{für } y_u, y_o > 0 \\ \left(y_o^{ri+1} + |y_u|^{ri+1} \right) & \text{für } y_u < 0,\ y_o > 0. \end{cases} \tag{6.9}$$

Es folgen daraus die theoretische kumulierte Klassenhäufigkeit $F_j^\star$ sowie die theoretische absolute Klassenhäufigkeit $n_j^\star := n\, f_j^\star$.

Es stellt sich die Frage, in welche Klassen die EVS-Daten eingeteilt werden sollen. Um zu gewährleisten, dass jede Klasse mit mindestens 10 Werten besetzt ist, werden 43 Klassen gewählt. Die Klassengrenzen sind in Tabelle 6.2 dargestellt.

Bei der Berechnung der theoretischen relativen Häufigkeit $f_j^\star$ nach Formel (6.9) ergibt sich im Falle des ersten Intervalls ein sehr hoher negativer Wert. Um die unendliche Reihe zu bestimmen, werden 150 Werte berechnet. Diese sind im Normalfall ausreichend, um die Konvergenz sicherzustellen. Hier führt jedoch auch ein höherer Rechenaufwand nicht zur Konvergenz. Daher muss der Wert 187 ausgeschlossen werden. Das neue erste Intervall lautet dann $[1706, 8000)$.

Im Anhang C befinden sich drei Tabellen, welche für alle 43 Klassen die empirischen Werte n_j, f_j und F_j sowie die theoretischen Werte $n_j^\star$, $f_j^\star$ und $F_j^\star$ basierend auf den jeweiligen Parameterschätzern angeben. Die Durchführung des χ^2-Testes bereitet keine Schwierigkeiten. Es sind alle Bedingungen erfüllt und Formel (6.2)

Tabelle 6.2: Klasseneinteilung der EVS-Daten

Klasse j	Intervall $[x_u, x_o)$	Klasse j	Intervall $[x_u, x_o)$
1	$[187, 8000)$	39	$[310\,000, 325\,000)$
2	$[8000, 16\,000)$	40	$[325\,000, 350\,000)$
3	$[16\,000, 24\,000)$	41	$[350\,000, 375\,000)$
...	...	42	$[375\,000, 418\,000)$
37	$[288\,000, 296\,000)$	43	$[418\,000, 547\,931]$
38	$[296\,000, 310\,000)$		

kann angewandt werden. Für die exakte Anwendung des Kolmogorov-Smirnov-Testes wären die empirische und die theoretische Verteilungsfunktion nötig. Erstere stellt kein Problem dar, zweitere ist jedoch mit einem hohen Rechenaufwand verbunden. Die Verteilungsfunktion müsste mit Hilfe der Tangentenregel (3.19) für 40 226 Werte numerisch bestimmt werden. Es ist jedoch möglich, den Kolmogorov-Smirnov-Test mit den klassierten Verteilungsfunktionen, also den empirischen und theoretischen kumulierten relativen Häufigkeiten F_j und $F_j^\star$ anstelle von F_n und F_0 in Formel (6.5) zu berechnen. Der kritische Wert bleibt dabei gleich (vgl. Brunazzo und Pollastri, 1986).

Tabelle 6.3 gibt die Ergebnisse für die EVS-Daten wieder. Vergleicht man die Werte miteinander, so bieten die Maximum-Likelihood-Schätzer die beste Anpassung. Die Reihenfolge der beiden anderen Verteilungen hängt von der betrachteten Prüfgröße ab. Die kritischen Werte der beiden Anpassungstests auf einem Signifikanzniveau von 5% lauten: $\chi^2_{k-z-1,1-\alpha} = \chi^2_{39,0.95} = 54.572$ für die verallgemeinerte, $\chi^2_{40,0.95} = 55.758$ für die einfache Lognormalverteilung und $\Delta_{n,1-\alpha/2} = \Delta_{40\,226,0.975} = 0.0068$. Damit lässt sich als Ergebnis festhalten: Jede der drei Verteilungsannahmen muss abgelehnt werden.

An dieser Stelle würde es sich empfehlen, eine alternative Verteilung anzupassen. Es sollen in diesem Kapitel jedoch nur die erarbeiteten Verfahren an einem Beispieldatensatz durchgeführt werden. Daher werden weiterhin die angepassten verallgemeinerten Lognormalverteilungen betrachtet.

Tabelle 6.3: Anpassungsgüte der EVS-Daten

Verteilungsannahme	χ^2	KS
Einfache Lognormalverteilung	480.0981	0.0241
Λ_g-Verteilung (Momentenmethode)	482.9417	0.0234
Λ_g-Verteilung (ML-Methode)	470.1155	0.0223
Kritische Werte: $\chi^2_{39,0.95} = 54.572$, $\chi^2_{40,0.95} = 55.758$, $\Delta_{40\,226,0.975} = 0.0068$		

6.3 Testen des Parameters r

Zur Durchführung des im Abschnitt 5.3 beschriebenen Likelihood-Quotienten-Tests müssen die Maximum-Likelihood-Schätzer der Lognormal- sowie der verallgemeinerten Lognormalverteilung bestimmt werden. Im Falle der EVS-Daten sind dies $\hat{\vartheta}_0 = (10.9568, 0.5920, 2)'$ und $\hat{\vartheta}_1 = (10.9589, 0.5839, 1.9266)'$ (vgl. Tabelle 6.1). Die zusammengesetzten Hypothesen $H_0 : \vartheta = \vartheta_0 = (\theta_1, \theta_2, 2)'$ gegen $H_1 : \vartheta = \vartheta_1 = (\theta_1, \theta_2, r)'$ mit θ_1 und θ_2 als Störparameter lassen sich dann anhand der Teststatistik $LQ^\star$ überprüfen und es gilt:

$$\begin{aligned} LQ^\star &= -2\big[\ln L(\hat{\vartheta}_0; x_1, \ldots, x_n) - \ln L(\hat{\vartheta}_1; x_1, \ldots, x_n)\big] \\ &\approx -2(-35\,993.98 + 35\,988.34) \\ &\approx 11.2970, \end{aligned} \tag{6.10}$$

was ca. dem 0.9992-Perzentil der χ^2_1-Verteilung entspricht. Die Nullhypothese kann also bei einem p-Wert von 0.0008 abgelehnt werden, da die Differenz der Log-Likelihood-Funktionen zu groß ist.

Der Score-Test kommt zu demselben Ergebnis. Das Interesse liegt hier auf der Informationsmatrix. Aus den Daten und dem geschätzten Parametervektor $\hat{\vartheta}_0 = (10.9568, 0.5920, 2)'$ errechnet sich der Score-Vektor als:

$$S(\hat{\vartheta}_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \ln L}{\partial \theta_1} \\ \frac{\partial \ln L}{\partial \theta_2} \\ \frac{\partial \ln L}{\partial r} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_{\theta_1}(\hat{\vartheta}_0) \\ S_{\theta_2}(\hat{\vartheta}_0) \\ S_r(\hat{\vartheta}_0) \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0.0892 \\ 11.1298 \\ -152.4064 \end{pmatrix}. \tag{6.11}$$

Der Score-Vektor einer Maximum-Likelihood-Schätzung sollte nahe am Nullvektor liegen. Der Wert $S_r(\hat{\vartheta}_0)$ weicht jedoch stark von 0 ab (hier wurde $\hat{r} = 2$ gesetzt), was zur Ablehnung der Nullhypothese führt. Zum Vergleich: Der Score-Vektor der Maximum-Likelihood-Schätzung für die verallgemeinerte Lognormalverteilung lautet mit $\hat{\vartheta}_1 = (10.9589, 0.5839, 1.9266)'$: $S(\hat{\vartheta}_1) \approx (5.6167, 1.2126, 0.0563)'$.

Die Informationsmatrix $I(\hat{\vartheta}_0)$ berechnet sich gemäß Formel (5.50) als:

$$I(\hat{\vartheta}_0) = \begin{pmatrix} I_{\hat{\theta}_1\hat{\theta}_1} & I_{\hat{\theta}_1\hat{\theta}_2} & I_{\hat{\theta}_1\hat{r}} \\ I_{\hat{\theta}_1\hat{\theta}_2} & I_{\hat{\theta}_2\hat{\theta}_2} & I_{\hat{\theta}_2\hat{r}} \\ I_{\hat{\theta}_1\hat{r}} & I_{\hat{\theta}_2\hat{r}} & I_{\hat{r}\hat{r}} \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 114\,782.12 & 0 & 0 \\ 0 & 229\,564.23 & -24\,789.79 \\ 0 & -24\,789.79 & 4\,699.39 \end{pmatrix}. \tag{6.12}$$

Die Inverse obiger Informationsmatrix lautet:

$$I^{-1}(\hat{\vartheta}_0) \approx 10^{-5} \begin{pmatrix} 8.71 & 0 & 0 \\ 0 & 1.01 & 5.34 \\ 0 & 5.34 & 49.45 \end{pmatrix}. \tag{6.13}$$

Zur Durchführung des Score-Tests für die zusammengesetzte Hypothese $H_0 : \vartheta = \vartheta_0 = (\theta_1, \theta_2, 2)'$ muss zunächst $I_r(\hat{\vartheta}_0)$ bestimmt werden (vgl. Abschnitt 5.5):

$$I_r(\hat{\vartheta}_0) = I_{\hat{r}\hat{r}} - \begin{pmatrix} I_{\hat{r}\hat{\theta}_1} & I_{\hat{r}\hat{\theta}_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_{\hat{\theta}_1\hat{\theta}_1} & I_{\hat{\theta}_1\hat{\theta}_2} \\ I_{\hat{\theta}_2\hat{\theta}_1} & I_{\hat{\theta}_2\hat{\theta}_2} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} I_{\hat{r}\hat{\theta}_1} \\ I_{\hat{r}\hat{\theta}_2} \end{pmatrix} \approx 2\,022.43. \tag{6.14}$$

Daraus folgt die Prüfgröße $\tilde{X}^2$ des Score-Tests:

$$\tilde{X}^2 = S_r(\hat{\vartheta}_0)' \; I_r^{-1}(\hat{\vartheta}_0) \; S_r(\hat{\vartheta}_0) = \frac{(-152.4046)^2}{2\,022.43} \approx 11.4851. \tag{6.15}$$

Dies entspricht einem p-Wert von ca. 0.0007 aus der χ^2_1-Verteilung. Die Annahme der einfachen Lognormalverteilung kann daher (erneut) abgelehnt werden. Somit würde man im Fall der EVS-Daten die verallgemeinerte der einfachen Lognormalverteilung vorziehen. Bestimmt man übrigens die Informationsmatrix über die negativen zweiten partiellen Ableitungen aus den Daten (vgl. Formel (5.31), S. 49), so ergibt sich als geschätzte Prüfgröße $\tilde{X}^2$ ein Wert von ca. 11.9105, was einen noch geringeren p-Wert bedingt.

Kapitel 7

Zusammenfassung

Die Beschäftigung mit den verschiedenen Eigenschaften der verallgemeinerten Lognormalverteilung zeigt: Nicht immer lassen sich die einzelnen Konzepte von der einfachen auf die verallgemeinerte Lognormalverteilung übertragen, da der zusätzliche Formparameter die Berechnungen in vielen Fällen behindert. So muss eine verallgemeinerte Variante der Standardnormalverteilung hergeleitet werden, da die verallgemeinerte Lognormal- aus der verallgemeinerten Normalverteilung abgeleitet wird und daher nicht durch die einfache Standardnormalverteilung dargestellt werden kann. Es lässt sich jedoch nicht für jedes Problem eine verallgemeinerte Lösung finden. So ist es bedauerlich, dass die Lorenzordnung im allgemeinen Fall nicht nachgewiesen werden kann, obwohl die graphischen Vergleiche für die Möglichkeit der Anordnung sprechen.

Die vorhandenen Eigenschaften der verallgmeinerten Lognormalverteilung können trotzdem um einige ergänzt werden. Die Ausdrücke für die Entropie sowie für die verschiedenen Theilkoeffizienten werden in der vorhandenen Literatur nicht erwähnt. Die numerische Betrachtung einiger dieser Größen verdeutlicht die unterschiedliche Abhängigkeit von den Formparametern θ_2 und r: Hält man jeweils einen von beiden Parametern fest und variiert den anderen, so folgen daraus gegenläufige Änderungen der betrachteten Größe. Interessant ist das Problem der gleichzeitigen Änderung beider Formparameter. So kann für den Theilkoeffizienten T_1 ein exponentieller Zusammenhang zwischen den Parametern graphisch dargestellt werden. Hier könnte sich eine genauere analytische Betrachtung anschließen.

Ein zeitlicher Schwerpunkt der Arbeit liegt in der Berechnung der Informationsmatrizen, da hier einige Nebenrechnungen für die Gammafunktion und die Mellin-Transformierte nötig sind. Es zeigt sich, dass die Anwesenheit eines Schwellenwertes für die Informationsmatrix von Bedeutung ist. Während bei einer verallgemeinerten Lognormalverteilung ohne Schwellenwert die asymptotische Kovarianz zwischen den Parameterschätzern $\hat{\theta}_1$ und $\hat{\theta}_2$ sowie zwischen $\hat{\theta}_1$ und $\hat{r}$ gleich 0 ist, unterscheiden sich diese Werte bei Vorliegen des Schwellenwertes von 0.

Bei der Anwendung der Schätzverfahren auf echte Daten kann die Anpassungsgüte durch die Verallgemeinerung leicht verbessert werden. Allerdings sind die Annahmen der einfachen wie der verallgemeinerten Lognormalverteilung nicht gerechtfertigt. Die Daten werden nicht genügend gut durch die jeweiligen Verteilungen angepasst. Im Test „Einfache gegen verallgemeinerte Lognormalverteilung“ hat die einfache Lognormalverteilung keinen Bestand und kann abgelehnt werden. Im Fall der EVS-Daten wird also durch die Anwendung der verallgemeinerten Lognormalverteilung eine Verbesserung erreicht, wie es durch die Hinzunahme eines weiteren Parameters zu erwarten ist.

Abschließend lässt sich sagen, dass die verallgemeinerte im Gegensatz zur einfachen Lognormalverteilung komplexere Analysen verlangt. Die Lorenzordnung ist sicherlich ein Punkt, dessen weiter gehende Untersuchung sich lohnt. Ebenso sollte man die verallgemeinerte Lognormalverteilung mit Schwellenwert einer genaueren Betrachtung unterziehen. Ihre bisherige Analyse verspricht jedoch, dass sich dies im Vergleich zur verallgemeinerten Lognormalverteilung ohne Schwellenwert etwas aufwendiger gestalten wird.

Literaturverzeichnis

Aitchison, J.; Brown, J. A. C. (1969): *The Lognormal Distribution*, Cambridge (Cambridge University Press).

Bronstein, I. N. [et al.] (1997): *Taschenbuch der Mathematik*, 3. überarbeitete und erweiterte Auflage der Neubearbeitung, Frankfurt a.M. (Harri Deutsch).

Brunazzo, A.; Pollastri, A. (1986): »Proposta di una nuova distribuzione: La lognormale generalizzata«, *Scritti in onore di Francesco Brambilla*, Band 1, 58-83.

Butler, R. J.; McDonald, J. B. (1989): »Using incomplete moments to measure inequality«, *Journal of Econometrics*, Band 42, 109-119.

Chen, G. (1995): »Generalized log-normal distributions with reliability application«, *Computational Statistics and Data Analysis*, Band 19, 309-319.

Cohen, A. C.; Whitten, B. J. (1988): *Parameter Estimation in Reliability and Life Span Models*, New York (Dekker).

Cox, D. R.; Hinkley, D. V. (1974): *Theoretical Statistics*, London (Chapman and Hall).

Crow, E. L. (Hrsg.); Shimizu, K. (Hrsg.) (1988): *Lognormal Distributions: Theory and Applications*, New York (Dekker).

Erwe, F. (1962): »Integralrechnung« in **Erwe, F.:** *Differential- und Integralrechnung*, Mannheim (Bibliographisches Institut), Band 2.

Johnson, N.; Kotz, S.; Balakrishnan, N. (1994): *Continuous univariate distributions*, Band 1, 2. Auflage, New York (Wiley).

Lunetta, G. (1963): »Di una generalizzazione dello schema della curva normale«, *Annali della Facolta di Economia e Commercio di Palermo*, Band 17, Nr. 2, 237-244.

Mátyás, L. (Hrsg.) (1999): *Generalized Method of Moments Estimation*, Cambridge (Cambridge University Press).

Nielsen, N. (1965): *Handbuch der Theorie der Gammafunktion*, New York (Chelsea).

Oberhettinger, F. (1974): *Tables of Mellin Transforms*, Heidelberg (Springer).

Peters, J. (1967): »Einführung in die allgemeine Informationstheorie« in **Wolter, H. (Hrsg.); Keidel, W. D. (Hrsg.):** *Kommunikation und Kybernetik in Einzeldarstellungen*, Berlin (Springer), Band 6.

Pollastri, A. (1987): »Le curve di concentrazione L_p e Z_p nella distribuzione lognormale generalizzata«, *Giornale degli Economisti e Annali di Economia*, 639-663.

Pollastri, A. (1997): »Lo studio della curtosi della distribuzione lognormale generalizzata«, *Quaderni di Statistica e Matematica Applicata alle Scienze Economico-Sociali*, Band 19, Nr. 1-2, 79-88.

Rinne, H. (1997): *Taschenbuch der Statistik*, 2. überarbeitete und erweiterte Auflage, Frankfurt a.M. (Harri Deutsch).

Rohatgi, V. K. (1976): *An Introduction to Probability Theory and Mathematical Statistics*, New York (Wiley).

SAS Institute Inc. (1999): *The SAS System for Windows*, Version 8, Cary (Statistisches Software-Paket).

Statistisches Bundesamt (1995): *Code-Verzeichnis der Einnahmen und Ausgaben der privaten Haushalte für die Einkommens- und Verbrauchsstichprobe 1993*, Wiesbaden.

Theil, H. (1967): »Economics and Information Theory« in **Theil, H. (Hrsg.):** *Studies in Mathematical and Managerial Economics*, Amsterdam (North-Holland), Band 7.

Uppuluri, V. R. R. (1981): »Some properties of the Log-Laplace distribution« in **Taillie, C. (Hrsg.); Patil, G. P. (Hrsg.); Baldessari, B. A. (Hrsg.):** *Statistical Distributions in Scientific Work*, Dordrecht (Reidel), Band 4.

Vianelli, S. (1963): »La misura della variabilità condizionata in uno schema generale delle curve normali di frequenza«, *Statistica*, Band 23, 447-474.

Vianelli, S. (1983): »The family of normal and lognormal distributions of order r«, *Metron*, Band 41, 3-10.

Wilfling, B. (1993): *Die Lorenz-Ordnung von Einkommensverteilungen*, Dissertation, Universität Dortmund.

Anhang A

Herleitungen

Das p-te Moment (Abschnitt 3.4), die Entropie (Abschnitt 3.6) und die Theilkoeffizienten (Abschnitt 4.2) leiten sich nach dem jeweils gleichen Prinzip her. Dieses wird im folgenden Abschnitt ausführlich für das p-te Moment μ_p der verallgemeinerten Lognormalverteilung beschrieben, die Herleitung orientiert sich an Brunazzo und Pollastri (1986).

Die Ableitungen der Gammafunktion (Anhang A.7) werden für die ersten und zweiten Ableitungen der Log-Likelihood-Funktion einer verallgemeinert lognormalverteilten Zufallsvariablen benötigt (Abschnitt 5.2).

Im Anhang A.8 findet sich die Berechnung der Informationsmatrix für die verallgemeinerte Lognormalverteilung mit Schwellenwert (vgl. Abschnitt 5.4).

A.1 p-tes Moment μ_p

Man erhält:

$$
\begin{aligned}
\mu_p &:= E[X^p] \\
&= \int_0^\infty x^p f(x)\ \mathrm{d}x \\
&= c\int_0^\infty x^p \frac{1}{\theta_2 x}\exp\left\{-\frac{1}{r}\left|\frac{\ln x-\theta_1}{\theta_2}\right|^r\right\}\ \mathrm{d}x \\
&= c\int_{-\infty}^\infty \exp\{pu\theta_2+p\theta_1\}\exp\left\{-\frac{1}{r}|u|^r\right\}\ \mathrm{d}u \\
&= c\int_0^\infty \exp\{pu\theta_2+p\theta_1\}\exp\left\{-\frac{1}{r}u^r\right\}\ \mathrm{d}u \quad + \\
&\quad + c\int_0^\infty \exp\{-pu\theta_2+p\theta_1\}\exp\left\{-\frac{1}{r}u^r\right\}\ \mathrm{d}u \\
&= 2c\exp\{p\theta_1\}\int_0^\infty \cosh\{pu\theta_2\}\exp\left\{-\frac{1}{r}u^r\right\}\ \mathrm{d}u \\
&= 2c\exp\{p\theta_1\}\int_0^\infty \left(\sum_{i=0}^\infty \frac{(pu\theta_2)^{2i}}{(2i)!}\right)\exp\left\{-\frac{1}{r}u^r\right\}\ \mathrm{d}u \\
&= 2c\exp\{p\theta_1\}\sum_{i=0}^\infty \frac{(p\theta_2)^{2i}}{(2i)!}\int_0^\infty u^{2i}\exp\left\{-\frac{1}{r}u^r\right\}\ \mathrm{d}u \\
&= 2c\exp\{p\theta_1\}\sum_{i=0}^\infty \frac{(p\theta_2)^{2i}}{(2i)!}\frac{1}{r}\left(\frac{1}{r}\right)^{-\frac{2i+1}{r}}\Gamma\left(\frac{2i+1}{r}\right) \\
&= \frac{\exp\{p\theta_1\}}{\Gamma\left(\frac{1}{r}\right)}\sum_{i=0}^\infty \frac{(p\theta_2)^{2i}}{(2i)!}r^{\frac{2i}{r}}\ \Gamma\left(\frac{2i+1}{r}\right) \qquad \text{(A.1)}
\end{aligned}
$$

nach Substitution mit $u=\frac{\ln x-\theta_1}{\theta_2}$ und nach Einsetzen des Kosinus hyperbolicus:

$$\cosh(y)=\frac{\exp(y)+\exp(-y)}{2}=\sum_{i=0}^\infty \frac{y^{2i}}{(2i)!} \qquad \text{(A.2)}$$

(vgl. Bronstein [et al.], 1997, S. 951), der Mellin-Transformierten und c:

$$c=\frac{1}{2r^{\frac{1}{r}}\,\Gamma\left(1+\frac{1}{r}\right)}. \qquad \text{(A.3)}$$

Für die Mellin-Transformierte Ξ gilt (vgl. Oberhettinger, 1974, S. 27):

$$
\begin{aligned}
&\xi(u)=\exp\left\{-au^p\right\}, \quad p>0 \quad \Rightarrow \\
&\Xi(z)=\int_0^\infty u^{z-1}\xi(u)\ \mathrm{d}u=\frac{1}{p}\,a^{-z/p}\,\Gamma\left(\frac{z}{p}\right), \quad Re(z)>0. \qquad \text{(A.4)}
\end{aligned}
$$

A.2 Entropie H

Nach Substitution sowie Einsetzen der Mellin-Transformierten (A.4) und c wie in Gleichung (A.3) folgt:

$$
\begin{aligned}
H &:= \mathrm{E}\left[-\ln(f(X))\right] \\
&= -\int_0^\infty \ln\left(\frac{c}{\theta_2 x}\exp\left\{-\frac{1}{r}\left|\frac{\ln x-\theta_1}{\theta_2}\right|^r\right\}\right)\cdot \\
&\quad \cdot \frac{c}{\theta_2 x}\exp\left\{-\frac{1}{r}\left|\frac{\ln x-\theta_1}{\theta_2}\right|^r\right\}\,\mathrm{d}x \\
&= -c\int_{-\infty}^\infty \ln\left(\frac{c}{\theta_2\exp\{u\theta_2+\theta_1\}}\exp\left\{-\frac{1}{r}|u|^r\right\}\right)\cdot \\
&\quad \cdot \exp\left\{-\frac{1}{r}|u|^r\right\}\,\mathrm{d}u \\
&= -c\int_{-\infty}^\infty \left(\ln\frac{c}{\theta_2}-u\theta_2-\theta_1-\frac{1}{r}|u|^r\right)\exp\left\{-\frac{1}{r}|u|^r\right\}\,\mathrm{d}u \\
&= -2c\left(\ln\frac{c}{\theta_2}-\theta_1\right)\int_0^\infty \exp\left\{-\frac{1}{r}u^r\right\}\,\mathrm{d}u + \\
&\quad + 2c\left(\frac{1}{r}\right)\int_0^\infty u^r\exp\left\{-\frac{1}{r}u^r\right\}\,\mathrm{d}u \\
&= \frac{1}{r}-\ln\frac{c}{\theta_2}+\theta_1. \qquad \text{(A.5)}
\end{aligned}
$$

A.3 Modifizierter Theilkoeffizient T_1^{med}

Man erhält:

$$
\begin{aligned}
T_1^{med} &:= \mathrm{E}\left[\frac{X}{\exp\theta_1}\ln\left(\frac{X}{\exp\theta_1}\right)\right] \\
&= \int_0^\infty \frac{x}{\exp\theta_1}\ln\left(\frac{x}{\exp\theta_1}\right)\frac{c}{\theta_2 x}\exp\left\{-\frac{1}{r}\left|\frac{\ln x-\theta_1}{\theta_2}\right|^r\right\}\,\mathrm{d}x \\
&= c\int_{-\infty}^\infty \exp\{u\theta_2\}\ln\left(\exp\{u\theta_2\}\right)\exp\left\{-\frac{1}{r}|u|^r\right\}\,\mathrm{d}u \\
&= c\theta_2\int_0^\infty \exp\{u\theta_2\}u\exp\left\{-\frac{1}{r}u^r\right\}\,\mathrm{d}u \quad - \\
&\quad - c\theta_2\int_0^\infty \exp\{-u\theta_2\}u\exp\left\{-\frac{1}{r}u^r\right\}\,\mathrm{d}u \\
&= 2c\theta_2\int_0^\infty \sinh(u\theta_2)u\exp\left\{-\frac{1}{r}u^r\right\}\,\mathrm{d}u \\
&= 2c\theta_2\sum_{i=0}^\infty \frac{\theta_2^{2i+1}}{(2i+1)!}\int_0^\infty u^{2i+2}\exp\left\{-\frac{1}{r}u^r\right\}\,\mathrm{d}u \\
&= 2c\theta_2\sum_{i=0}^\infty \frac{\theta_2^{2i+1}}{(2i+1)!}\frac{1}{r}r^{\frac{2i+3}{r}}\Gamma\left(\frac{2i+3}{r}\right) \\
&= \frac{\theta_2}{\Gamma\left(\frac{1}{r}\right)}r^{\frac{2}{r}}\sum_{i=0}^\infty \frac{\theta_2^{2i+1}}{(2i+1)!}r^{\frac{2i}{r}}\Gamma\left(\frac{2i+3}{r}\right) \qquad \text{(A.6)}
\end{aligned}
$$

nach Substitution und Einsetzen des Sinus hyperbolicus:

$$
\sinh(y) = \frac{\exp(y)-\exp(-y)}{2} = \sum_{i=0}^\infty \frac{y^{2i+1}}{(2i+1)!} \qquad \text{(A.7)}
$$

(vgl. Bronstein [et al.], 1997, S. 951), der Mellin-Transformierten (A.4) und c wie in (A.3).

A.4 Modifizierter Theilkoeffizient T_1^{mod}

Analog zu T_1^{med} folgt T_1^{mod} für $r > 1$ als:

$$
\begin{aligned}
T_1^{mod} &:= \mathrm{E}\left[\frac{X}{\exp\left\{\theta_1 - \theta_2^{\frac{r}{r-1}}\right\}} \ln\left(\frac{X}{\exp\left\{\theta_1 - \theta_2^{\frac{r}{r-1}}\right\}}\right)\right] \\
&= \int_0^\infty \frac{x}{\exp\left\{\theta_1 - \theta_2^{\frac{r}{r-1}}\right\}} \ln\left(\frac{x}{\exp\left\{\theta_1 - \theta_2^{\frac{r}{r-1}}\right\}}\right) \cdot \\
&\quad \cdot \frac{c}{\theta_2 x} \exp\left\{-\frac{1}{r}\left|\frac{\ln x - \theta_1}{\theta_2}\right|^r\right\} \,\mathrm{d}x \\
&= \frac{c}{\exp\left\{-\theta_2^{\frac{r}{r-1}}\right\}} \int_{-\infty}^\infty \exp\{u\theta_2\} \exp\left\{-\frac{1}{r}|u|^r\right\} \cdot \\
&\quad \cdot \underbrace{\ln\left(\frac{\exp\{u\theta_2\}}{\exp\left\{-\theta_2^{\frac{r}{r-1}}\right\}}\right)}_{= u\theta_2 + \theta_2^{\frac{r}{r-1}}} \,\mathrm{d}u \\
&= \frac{c}{\exp\left\{-\theta_2^{\frac{r}{r-1}}\right\}} \int_0^\infty \exp\{u\theta_2\} \left(u\theta_2 + \theta_2^{\frac{r}{r-1}}\right) \exp\left\{-\frac{1}{r}u^r\right\} \,\mathrm{d}u + \\
&\quad + \frac{c}{\exp\left\{-\theta_2^{\frac{r}{r-1}}\right\}} \int_0^\infty \exp\{-u\theta_2\} \left(-u\theta_2 + \theta_2^{\frac{r}{r-1}}\right) \exp\left\{-\frac{1}{r}u^r\right\} \,\mathrm{d}u \\
&= \frac{2c}{\exp\left\{-\theta_2^{\frac{r}{r-1}}\right\}} \theta_2 \int_0^\infty \sinh(u\theta_2) u \exp\left\{-\frac{1}{r}u^r\right\} \,\mathrm{d}u + \\
&\quad + \frac{2c}{\exp\left\{-\theta_2^{\frac{r}{r-1}}\right\}} \theta_2^{\frac{r}{r-1}} \int_0^\infty \cosh(u\theta_2) \exp\left\{-\frac{1}{r}u^r\right\} \,\mathrm{d}u = \cdots = \\
&= \frac{\theta_2}{\Gamma\left(\frac{1}{r}\right) \exp\left\{-\theta_2^{\frac{r}{r-1}}\right\}} \sum_{i=0}^\infty \frac{\theta_2^{2i}}{(2i)!} r^{\frac{2i}{r}} \cdot \\
&\quad \cdot \left[\frac{\theta_2}{2i+1} r^{\frac{2}{r}} \Gamma\left(\frac{2i+3}{r}\right) + \theta_2^{1/r-1} \Gamma\left(\frac{2i+1}{r}\right)\right]. \qquad \text{(A.8)}
\end{aligned}
$$

A.5 Theilkoeffizient T_1

Mit

$$A := \frac{\mathrm{E}[X]}{\exp\theta_1} = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{r}\right)} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\theta_2^{2i}}{(2i)!} r^{\frac{2i}{r}} \Gamma\left(\frac{2i+1}{r}\right) \tag{A.9}$$

folgt analog zu T_1^{med}:

$$\begin{aligned}
T_1 &:= \mathrm{E}\left[\frac{X}{\mathrm{E}[X]} \ln\left(\frac{X}{\mathrm{E}[X]}\right)\right] \\
&= \int_0^{\infty} \frac{x}{A\exp\theta_1} \ln\left(\frac{x}{A\exp\theta_1}\right) \frac{c}{\theta_2 x} \exp\left\{-\frac{1}{r}\left|\frac{\ln x - \theta_1}{\theta_2}\right|^r\right\} \,\mathrm{d}x \\
&= c\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp\{u\theta_2\}}{A} \underbrace{\ln\left(\frac{\exp\{u\theta_2\}}{A}\right)}_{= u\theta_2 - \ln A} \exp\left\{-\frac{1}{r}|u|^r\right\} \,\mathrm{d}u \\
&= \frac{c}{A}\int_0^{\infty} \exp\{u\theta_2\}(u\theta_2 - \ln A)\exp\left\{-\frac{1}{r}u^r\right\} \,\mathrm{d}u \quad + \\
&\quad + \frac{c}{A}\int_0^{\infty} \exp\{-u\theta_2\}(-u\theta_2 - \ln A)\exp\left\{-\frac{1}{r}u^r\right\} \,\mathrm{d}u \\
&= \frac{2c}{A}\theta_2 \int_0^{\infty} \sinh(u\theta_2) u \exp\left\{-\frac{1}{r}u^r\right\} \,\mathrm{d}u \quad - \\
&\quad - \frac{2c}{A}\ln A \int_0^{\infty} \cosh(u\theta_2)\exp\left\{-\frac{1}{r}u^r\right\} \,\mathrm{d}u = \cdots = \\
&= \frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{r}\right) A} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\theta_2^{2i}}{(2i)!} r^{\frac{2i}{r}} \quad \cdot \\
&\quad \cdot \left[\frac{\theta_2^2}{2i+1} r^{\frac{2}{r}} \Gamma\left(\frac{2i+3}{r}\right) - \ln A\,\Gamma\left(\frac{2i+1}{r}\right)\right] \\
&= \frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{r}\right) A} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\theta_2^{2i+2}}{(2i+1)!} r^{\frac{2i+2}{r}} \Gamma\left(\frac{2i+3}{r}\right) - \ln A.
\end{aligned} \tag{A.10}$$

A.6 Zweiter Theilkoeffizient T_2

Mit $A = \mathrm{E}[X]/\exp\theta_1$ wie in Gleichung (A.9) folgt analog zu T_1^{med}:

$$
\begin{aligned}
T_2 &:= \mathrm{E}\left[\ln\left(\frac{\mathrm{E}[X]}{X}\right)\right] \\
&= \int_0^\infty \ln\left(\frac{A\exp\theta_1}{x}\right)\frac{c}{\theta_2 x}\exp\left\{-\frac{1}{r}\left|\frac{\ln x-\theta_1}{\theta_2}\right|^r\right\}\,\mathrm{d}x \\
&= c\int_{-\infty}^\infty (\ln A - u\theta_2)\exp\left\{-\frac{1}{r}|u|^r\right\}\,\mathrm{d}u \\
&= c\int_0^\infty (\ln A - u\theta_2)\exp\left\{-\frac{1}{r}u^r\right\}\,\mathrm{d}u \quad + \\
&\quad + \quad c\int_0^\infty (\ln A + u\theta_2)\exp\left\{-\frac{1}{r}u^r\right\}\,\mathrm{d}u \\
&= 2c\ln A\int_0^\infty \exp\left\{-\frac{1}{r}u^r\right\}\,\mathrm{d}u \\
&= 2c\ln A\left(\frac{1}{r}\right)^{\frac{r-1}{r}}\Gamma\left(\frac{1}{r}\right) \\
&= \ln A. \qquad\qquad (A.11)
\end{aligned}
$$

A.7 Ableitungen der Gammafunktion

Es gelten zusätzlich zur Gammafunktion $\Gamma(\cdot)$ die folgenden Bezeichnungen (vgl. Nielsen, 1965):

$$\text{Digammafunktion:} \quad \Psi(x) := \frac{\partial}{\partial x} \ln \Gamma(x) = \frac{\frac{\partial}{\partial x}\Gamma(x)}{\Gamma(x)} =: \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}, \tag{A.12}$$

$$\text{Trigammafunktion:} \quad \Psi'(x) := \frac{\partial}{\partial x}\Psi(x). \tag{A.13}$$

Im Folgenden bezeichnen $\Gamma'(x)$, $\Psi(x)$ und $\Psi'(x)$ den Funktionswert der jeweiligen Funktion an der Stelle x. Diese (vertafelten) Werte sind nicht gleichzusetzen mit den tatsächlichen Ableitungen, da die inneren Ableitungen fehlen.

Für $\Gamma\left(1+\frac{1}{r}\right)$ lassen sich die folgenden Beziehungen aufstellen:

$$\begin{aligned}
\Gamma\left(1+\frac{1}{r}\right) &:= \int_0^\infty \exp\{-t\}\, t^{1+\frac{1}{r}-1}\, \mathrm{d}t = \int \exp\{-t\}\, t^{1/r}\, \mathrm{d}t, \\
\frac{\partial}{\partial r}\Gamma\left(1+\frac{1}{r}\right) &= -\frac{1}{r^2}\int \exp\{-t\}\, t^{1/r} \ln t\, \mathrm{d}t \\
&= -\frac{1}{r^2}\int \exp\{-t\}\, t^{1+\frac{1}{r}-1} \ln t\, \mathrm{d}t = -\frac{1}{r^2}\Gamma'\left(1+\frac{1}{r}\right), \\
\frac{\partial}{\partial r}\ln\Gamma\left(1+\frac{1}{r}\right) &= -\frac{1}{r^2}\frac{\Gamma'\left(1+\frac{1}{r}\right)}{\Gamma\left(1+\frac{1}{r}\right)} = -\frac{1}{r^2}\Psi\left(1+\frac{1}{r}\right), \\
\frac{\partial^2}{\partial^2 r}\Gamma\left(1+\frac{1}{r}\right) &= \frac{2}{r^3}\int \exp\{-t\}\, t^{1/r} \ln t\, \mathrm{d}t + \frac{1}{r^4}\int \exp\{-t\}\, t^{1/r} (\ln t)^2\, \mathrm{d}t \\
&= \frac{2}{r^3}\Gamma'\left(1+\frac{1}{r}\right) + \frac{1}{r^4}\Gamma''\left(1+\frac{1}{r}\right), \\
\frac{\partial^2}{\partial^2 r}\ln\Gamma\left(1+\frac{1}{r}\right) &= \frac{\left[\frac{2}{r^3}\Gamma'\left(1+\frac{1}{r}\right) + \frac{1}{r^4}\Gamma''\left(1+\frac{1}{r}\right)\right]\Gamma\left(1+\frac{1}{r}\right) - \frac{1}{r^4}\left[\Gamma'\left(1+\frac{1}{r}\right)\right]^2}{\left[\Gamma\left(1+\frac{1}{r}\right)\right]^2} \\
&= \frac{2}{r^3}\Psi\left(1+\frac{1}{r}\right) + \frac{1}{r^4}\Psi'\left(1+\frac{1}{r}\right),
\end{aligned}$$

denn:

$$\begin{aligned}
\Psi = \frac{\Gamma'}{\Gamma} \quad &\Rightarrow \quad \Psi' = \frac{\Gamma''\Gamma - (\Gamma')^2}{\Gamma^2} = \frac{\Gamma''}{\Gamma} - \Psi^2 \\
&\Rightarrow \quad \frac{\Gamma''}{\Gamma} = \Psi' + \Psi^2.
\end{aligned} \tag{A.14}$$

A.8 Informationsmatrix mit Schwellenwert

Die Dichte einer verallgemeinert lognormalverteilten Zufallsvariablen X mit Parametervektor $\vartheta = (\theta_1, \theta_2, r, \lambda)'$ lautet:

$$f(x|\theta_1,\theta_2,r,\lambda) := \begin{cases} \dfrac{c}{\theta_2(x-\lambda)} \exp\left\{-\dfrac{1}{r}\left|\dfrac{\ln(x-\lambda)-\theta_1}{\theta_2}\right|^r\right\} & x > \lambda \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \tag{A.15}$$

Daraus ergibt sich die Log-Likelihood-Funktion:

$$\begin{aligned} \ln L(\vartheta; x_1,\ldots,x_n) = n\,\ln c - n\,\ln\theta_2 - \sum \ln(x_i-\lambda) - \\ - \frac{1}{r}\sum\left|\frac{\ln(x_i-\lambda)-\theta_1}{\theta_2}\right|^r. \end{aligned} \tag{A.16}$$

Die partiellen Ableitungen obiger Funktion nach θ_1, θ_2 und r sind bis auf den Ausdruck $\ln(x_i-\lambda)$ statt $\ln x_i$ identisch mit denen der verallgemeinerten Lognormalverteilung ohne Schwellenwert λ (vgl. Abschnitt 5.2). Mit demselben Argument wie bei der Übereinstimmung der Informationsmatrizen verallgemeinert normal- und lognormalverteilter Zufallsvariablen sind auch hier die Erwartungswerte identisch, die substituierten Terme sind gleich (vgl. Abschnitt 5.4). Es bleibt also noch, die partiellen zweiten Ableitungen nach λ und deren negative Erwartungswerte zu bestimmen. Die erste partielle Ableitung lautet:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \ln L}{\partial\lambda} = \sum \frac{1}{x_i-\lambda} + \\ + \frac{1}{\theta_2}\sum\left|\frac{\ln(x_i-\lambda)-\theta_1}{\theta_2}\right|^{r-1} \frac{1}{x_i-\lambda}\operatorname{sign}\big(\ln(x_i-\lambda)-\theta_1\big). \end{aligned} \tag{A.17}$$

Daraus folgen die zweiten partiellen Ableitungen:

$$\frac{\partial^2 \ln L}{\partial\theta_1\partial\lambda} = \frac{1-r}{\theta_2^2}\sum\left|\frac{\ln(x_i-\lambda)-\theta_1}{\theta_2}\right|^{r-2} \frac{1}{x_i-\lambda}, \tag{A.18}$$

$$\frac{\partial^2 \ln L}{\partial\theta_2\partial\lambda} = \frac{-r}{\theta_2^2}\sum\left|\frac{\ln(x_i-\lambda)-\theta_1}{\theta_2}\right|^{r-1} \frac{1}{x_i-\lambda}\operatorname{sign}\big(\ln(x_i-\lambda)-\theta_1\big), \tag{A.19}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \ln L}{\partial r\partial\lambda} = \frac{1}{\theta_2}\sum\left|\frac{\ln(x_i-\lambda)-\theta_1}{\theta_2}\right|^{r-1} \ln\left(\left|\frac{\ln(x_i-\lambda)-\theta_1}{\theta_2}\right|\right) \cdot \\ \cdot \frac{1}{x_i-\lambda}\operatorname{sign}\big(\ln(x_i-\lambda)-\theta_1\big), \end{aligned} \tag{A.20}$$

$$\frac{\partial^2 \ln L}{\partial^2 \lambda} = \sum \frac{1}{(x_i-\lambda)^2} + \frac{1-r}{\theta_2^2} \sum \left| \frac{\ln(x_i-\lambda)-\theta_1}{\theta_2} \right|^{r-2} \frac{1}{(x_i-\lambda)^2} + \\ + \frac{1}{\theta_2} \sum \left| \frac{\ln(x_i-\lambda)-\theta_1}{\theta_2} \right|^{r-1} \frac{1}{(x_i-\lambda)^2} \operatorname{sign}\big(\ln(x_i-\lambda)-\theta_1\big). \tag{A.21}$$

Die Elemente der Informationsmatrix sind die negativen Erwartungswerte obiger zweiter partieller Ableitungen. Diese berechnen sich jeweils nach demselben Schema: Zunächst wird mit $u = \frac{\ln(x-\lambda)-\theta_1}{\theta_2} \Leftrightarrow x - \lambda = \exp\{u\theta_2 + \theta_1\}$ substituiert, dann werden die Beträge aufgelöst und die entstandenen Integrale wieder zusammengefasst durch die Hyperbelfunktionen:

$$\cosh(y) = \frac{\exp(y)+\exp(-y)}{2} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{y^{2i}}{(2i)!} \quad \text{bzw.} \tag{A.22}$$

$$\sinh(y) = \frac{\exp(y)-\exp(-y)}{2} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{y^{2i+1}}{(2i+1)!} \tag{A.23}$$

(vgl. Bronstein [et al.], 1997, S. 951). Danach werden die jeweiligen Mellin-Transformierten (A.4) bestimmt und der Faktor $c = \left[2r^{1/r}\,\Gamma\left(1+\frac{1}{r}\right)\right]^{-1}$ eingesetzt.

Im Folgenden wird das Matrixelement $I_{\lambda\lambda}$ berechnet, die übrigen drei Elemente $I_{\theta_1\lambda}$, $I_{\theta_2\lambda}$ und $I_{r\lambda}$ ergeben sich analog. Zunächst gilt für die drei einzelnen Erwartungswerte aus Gleichung (A.21):

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}\left[\frac{1}{(X-\lambda)^2}\right] &= \int_{\lambda}^{\infty} \frac{1}{(x-\lambda)^2} \frac{c}{\theta_2(x-\lambda)} \exp\left\{-\frac{1}{r}\left|\frac{\ln(x-\lambda)-\theta_1}{\theta_2}\right|^r\right\} \mathrm{d}x \\
&= c\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(\exp\{u\theta_2+\theta_1\})^2} \exp\left\{-\frac{1}{r}|u|^r\right\} \mathrm{d}u \\
&= \frac{c}{\exp\{2\theta_1\}} \int_0^{\infty} \exp\{-2u\theta_2\} \exp\left\{-\frac{1}{r}u^r\right\} \mathrm{d}u + \\
&\quad + \frac{c}{\exp\{2\theta_1\}} \int_0^{\infty} \exp\{2u\theta_2\} \exp\left\{-\frac{1}{r}u^r\right\} \mathrm{d}u \\
&= \frac{2c}{\exp\{2\theta_1\}} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(2\theta_2)^{2i}}{(2i)!} \int_0^{\infty} u^{2i} \exp\left\{-\frac{1}{r}u^r\right\} \mathrm{d}u \\
&= \frac{1}{\exp\{2\theta_1\}\,\Gamma\left(\frac{1}{r}\right)} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(2\theta_2)^{2i}}{(2i)!} r^{2i/r}\,\Gamma\left(\frac{2i+1}{r}\right),
\end{aligned} \tag{A.24}$$

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{E}\left[\left|\frac{\ln(X-\lambda)-\theta_1}{\theta_2}\right|^{r-2}\frac{1}{(X-\lambda)^2}\right] \\
&= c\int_{-\infty}^{\infty}|u|^{r-2}\,\frac{1}{(\exp\{u\theta_2+\theta_1\})^2}\,\exp\left\{-\frac{1}{r}|u|^r\right\}\,\mathrm{d}u \\
&= \frac{c}{\exp\{2\theta_1\}}\int_0^{\infty}u^{r-2}\,\exp\{-2u\theta_2\}\,\exp\left\{-\frac{1}{r}u^r\right\}\,\mathrm{d}u + \\
&\quad + \frac{c}{\exp\{2\theta_1\}}\int_0^{\infty}u^{r-2}\,\exp\{2u\theta_2\}\,\exp\left\{-\frac{1}{r}u^r\right\}\,\mathrm{d}u \\
&= \frac{2c}{\exp\{2\theta_1\}}\sum_{i=0}^{\infty}\frac{(2\theta_2)^{2i}}{(2i)!}\int_0^{\infty}u^{r-2+2i}\,\exp\left\{-\frac{1}{r}u^r\right\}\,\mathrm{d}u \\
&= \frac{1}{\exp\{2\theta_1\}\,r^{2/r}\,\Gamma\left(1+\frac{1}{r}\right)}\sum_{i=0}^{\infty}\frac{(2\theta_2)^{2i}}{(2i)!}r^{2i/r}\,\Gamma\left(1+\frac{2i-1}{r}\right), \qquad \text{(A.25)}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{E}\left[\left|\frac{\ln(X-\lambda)-\theta_1}{\theta_2}\right|^{r-1}\frac{1}{(X-\lambda)^2}\,\mathrm{sign}\big(\ln(X-\lambda)-\theta_1\big)\right] \\
&= c\int_{-\infty}^{\infty}|u|^{r-1}\,\frac{1}{(\exp\{u\theta_2+\theta_1\})^2}\,\mathrm{sign}(u\theta_2)\,\exp\left\{-\frac{1}{r}|u|^r\right\}\,\mathrm{d}u \\
&= \frac{c}{\exp\{2\theta_1\}}\int_0^{\infty}u^{r-1}\,\exp\{-2u\theta_2\}\,\exp\left\{-\frac{1}{r}u^r\right\}\,\mathrm{d}u - \\
&\quad - \frac{c}{\exp\{2\theta_1\}}\int_0^{\infty}u^{r-1}\,\exp\{2u\theta_2\}\,\exp\left\{-\frac{1}{r}u^r\right\}\,\mathrm{d}u \\
&= -\frac{2c}{\exp\{2\theta_1\}}\sum_{i=0}^{\infty}\frac{(2\theta_2)^{2i+1}}{(2i+1)!}\int_0^{\infty}u^{r-1+2i+1}\,\exp\left\{-\frac{1}{r}u^r\right\}\,\mathrm{d}u \\
&= -\frac{1}{\exp\{2\theta_1\}\,\Gamma\left(1+\frac{1}{r}\right)}\sum_{i=0}^{\infty}\frac{(2\theta_2)^{2i+1}}{(2i+1)!}r^{2i/r}\,\Gamma\left(1+\frac{2i+1}{r}\right). \qquad \text{(A.26)}
\end{aligned}
$$

Damit ergibt sich das Matrixelement $I_{\lambda\lambda}$ aus:

$$
\begin{aligned}
I_{\lambda\lambda} &= -\mathrm{E}\left[\frac{\partial^2 \ln L}{\partial^2 \lambda}\right] \\
&= -\frac{n}{\exp\{2\theta_1\}\,\Gamma\left(\frac{1}{r}\right)} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(2\theta_2)^{2i}}{(2i)!} r^{2i/r}\,\Gamma\left(\frac{2i+1}{r}\right) + \\
&\quad + \frac{(r-1)\,n}{\theta_2^2\,\exp\{2\theta_1\}\,r^{2/r}\,\Gamma\left(1+\frac{1}{r}\right)} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(2\theta_2)^{2i}}{(2i)!} r^{2i/r}\,\Gamma\left(1+\frac{2i-1}{r}\right) + \\
&\quad + \frac{n}{\theta_2\,\exp\{2\theta_1\}\,\Gamma\left(1+\frac{1}{r}\right)} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(2\theta_2)^{2i+1}}{(2i+1)!} r^{2i/r} \underbrace{\Gamma\left(1+\frac{2i+1}{r}\right)}_{=\left(\frac{2i+1}{r}\right)\Gamma\left(\frac{2i+1}{r}\right)} \\
&= \frac{n}{\exp\{2\theta_1\}\,\Gamma\left(\frac{1}{r}\right)} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(2\theta_2)^{2i}}{(2i)!} r^{2i/r}\,\Gamma\left(\frac{2i+1}{r}\right) + \\
&\quad + \frac{(r-1)\,n}{\theta_2^2\,\exp\{2\theta_1\}\,r^{2/r}\,\Gamma\left(1+\frac{1}{r}\right)} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(2\theta_2)^{2i}}{(2i)!} r^{2i/r}\,\Gamma\left(1+\frac{2i-1}{r}\right) \\
&= \frac{n}{\exp\{2\theta_1\}\,\Gamma\left(\frac{1}{r}\right)} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(2\theta_2)^{2i}}{(2i)!} r^{2i/r}\,\cdot \\
&\qquad\qquad \cdot \left[\Gamma\left(\frac{2i+1}{r}\right) + \frac{r-1}{\theta_2^2\,r^{2/r-1}}\Gamma\left(1+\frac{2i-1}{r}\right)\right]. \qquad \text{(A.27)}
\end{aligned}
$$

Für die übrigen drei Elemente gilt nach analoger Rechnung:

$$
I_{\theta_1\lambda} = \frac{n\,(r-1)}{\theta_2^2\,\exp\{\theta_1\}\,r^{2/r}\,\Gamma\left(1+\frac{1}{r}\right)} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\theta_2^{2i}}{(2i)!} r^{2i/r}\Gamma\left(1+\frac{2i-1}{r}\right), \qquad \text{(A.28)}
$$

$$
I_{\theta_2\lambda} = -\frac{n\,r}{\theta_2\,\exp\{\theta_1\}\,\Gamma\left(1+\frac{1}{r}\right)} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\theta_2^{2i}}{(2i+1)!} r^{2i/r}\Gamma\left(1+\frac{2i+1}{r}\right), \qquad \text{(A.29)}
$$

$$
\begin{aligned}
I_{r\lambda} &= \frac{n}{\exp\{\theta_1\}\,\Gamma\left(\frac{1}{r}\right)} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\theta_2^{2i}}{(2i+1)!} r^{2i/r}\,\cdot \\
&\qquad\qquad \cdot \left[\ln(r)\,\Gamma\left(1+\frac{2i+1}{r}\right) + \Gamma'\left(1+\frac{2i+1}{r}\right)\right], \qquad \text{(A.30)}
\end{aligned}
$$

wobei $\Gamma'(\cdot)$ den Funktionswert der Ableitung der Gammafunktion bezeichnet.

Anhang B

Tafel der Verteilungsfunktion der verallgemeinerten Standardnormalverteilung für $r = 3$

Die folgende Tabelle beinhaltet Werte der Verteilungsfunktion $\Phi_r(u)$ der verallgemeinerten Standardnormalverteilung mit dem Formparameter $r = 3$ (vgl. Abschnitt 3.2). Dabei wurden für u Werte von 0 bis 3.49 im Abstand von 0.01 berechnet. Aus Platzgründen entfällt bei der Darstellung von $\Phi_3(u)$ die Null vor dem Komma.

Das entsprechende Programm zur Erzeugung der Tafel befindet sich im Anhang D.

Tabelle B.1: Verteilungsfunktion $\Phi_3(u)$ der verallgemeinerten Standardnormalverteilung für $0 \leq u < 3.5$

u	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
0.0	.500000	.503421	.506842	.510263	.513684	.517105	.520525	.523946	.527367	.530787
0.1	.534208	.537628	.541047	.544467	.547886	.551304	.554722	.558140	.561557	.564973
0.2	.568388	.571802	.575215	.578627	.582038	.585448	.588856	.592262	.595667	.599070
0.3	.602471	.605870	.609266	.612661	.616052	.619441	.622828	.626211	.629591	.632968
0.4	.636341	.639710	.643076	.646438	.649795	.653148	.656496	.659839	.663178	.666511
0.5	.669838	.673160	.676476	.679786	.683090	.686387	.689677	.692960	.696236	.699504
0.6	.702765	.706017	.709261	.712497	.715724	.718942	.722150	.725349	.728538	.731718
0.7	.734886	.738045	.741192	.744328	.747453	.750566	.753667	.756756	.759832	.762896
0.8	.765947	.768984	.772007	.775017	.778013	.780994	.783960	.786912	.789848	.792769
0.9	.795674	.798563	.801435	.804291	.807130	.809952	.812757	.815544	.818313	.821064
1.0	.823797	.826511	.829206	.831882	.834538	.837175	.839793	.842390	.844967	.847523
1.1	.850059	.852574	.855067	.857540	.859991	.862420	.864827	.867213	.869576	.871916
1.2	.874234	.876530	.878802	.881051	.883278	.885481	.887660	.889816	.891949	.894057
1.3	.896142	.898202	.900239	.902252	.904240	.906204	.908144	.910059	.911950	.913816
1.4	.915658	.917476	.919268	.921037	.922780	.924499	.926194	.927864	.929510	.931131
1.5	.932727	.934299	.935847	.937371	.938870	.940346	.941797	.943224	.944627	.946007
1.6	.947363	.948695	.950004	.951290	.952553	.953792	.955009	.956203	.957374	.958523
1.7	.959650	.960754	.961837	.962898	.963938	.964956	.965953	.966929	.967885	.968820
1.8	.969735	.970629	.971504	.972360	.973196	.974012	.974810	.975589	.976350	.977093
1.9	.977817	.978524	.979214	.979886	.980542	.981181	.981803	.982409	.983000	.983574
2.0	.984134	.984678	.985207	.985722	.986223	.986709	.987182	.987641	.988087	.988520
2.1	.988940	.989348	.989743	.990127	.990499	.990859	.991208	.991546	.991874	.992190
2.2	.992497	.992794	.993081	.993358	.993626	.993885	.994136	.994377	.994611	.994836
2.3	.995053	.995263	.995465	.995659	.995847	.996028	.996202	.996369	.996530	.996685
2.4	.996834	.996978	.997115	.997248	.997375	.997497	.997614	.997726	.997834	.997938
2.5	.998037	.998131	.998222	.998309	.998393	.998472	.998549	.998622	.998691	.998758
2.6	.998821	.998882	.998940	.998995	.999048	.999098	.999146	.999192	.999235	.999277
2.7	.999316	.999354	.999389	.999423	.999455	.999486	.999515	.999543	.999569	.999594
2.8	.999617	.999639	.999660	.999680	.999699	.999717	.999734	.999750	.999765	.999780
2.9	.999793	.999806	.999818	.999829	.999840	.999850	.999860	.999869	.999877	.999885
3.0	.999893	.999900	.999906	.999912	.999918	.999924	.999929	.999934	.999938	.999942
3.1	.999946	.999950	.999954	.999957	.999960	.999963	.999965	.999968	.999970	.999972
3.2	.999974	.999976	.999978	.999980	.999981	.999983	.999984	.999985	.999986	.999987
3.3	.999988	.999989	.999990	.999991	.999991	.999992	.999993	.999993	.999994	.999994
3.4	.999995	.999995	.999996	.999996	.999996	.999997	.999997	.999997	.999997	.999998

Es gilt: $\Phi_r(-u) = \Phi_r(u)$ für alle $r \geq 1$.

Anhang C

Anpassungen an die EVS-Daten

Im Folgenden finden sich die drei Tabellen, auf denen die Teststatistiken des χ^2- und des Kolmogorov-Smirnov-Tests für die EVS-Daten beruhen. Es bezeichnen dabei x_u und x_o die Grenzen des Intervalls $[x_u, x_o)$, n_j die absolute Klassenhäufigkeit, f_j die relative Klassenhäufigkeit und F_j die kumulierte relative Klassenhäufigkeit im empirischen Fall. Die Ausdrücke $n_j^\star$, $f_j^\star$, $F_j^\star$ kennzeichnen die entsprechenden Häufigkeiten im theoretischen Fall (vgl. Abschnitt 6.2).

Tabelle C.1: Anpassung der einfachen Lognormalverteilung mit $\hat{\theta}_1 = 10.9568$ und $\hat{\theta}_2 = 0.5920$ ($r = 2$) an die EVS-Daten

x_u	x_o	n_j	f_j	F_j	$f_j^\star$	$F_j^\star$	$n_j^\star$
1 706	8 000	19	0.0005	0.0005	0.0004	0.0004	17.6715
8 000	16 000	858	0.0213	0.0218	0.0151	0.0155	607.5130
16 000	24 000	2402	0.0597	0.0815	0.0551	0.0706	2215.7902
24 000	32 000	3307	0.0822	0.1637	0.0916	0.1623	3685.8191
32 000	40 000	3925	0.0976	0.2613	0.1092	0.2715	4393.8124
40 000	48 000	4019	0.0999	0.3612	0.1105	0.3819	4443.3251
48 000	56 000	3972	0.0987	0.4600	0.1021	0.4840	4106.9982
56 000	64 000	3786	0.0941	0.5541	0.0896	0.5736	3602.2917
64 000	72 000	3302	0.0821	0.6362	0.0761	0.6497	3060.8920
72 000	80 000	2771	0.0689	0.7050	0.0634	0.7131	2550.4691
80 000	88 000	2306	0.0573	0.7624	0.0522	0.7653	2099.7551
88 000	96 000	1935	0.0481	0.8105	0.0427	0.8080	1716.3173
96 000	104 000	1540	0.0383	0.8488	0.0347	0.8427	1397.3268
104 000	112 000	1204	0.0299	0.8787	0.0282	0.8709	1135.5583
112 000	120 000	979	0.0243	0.9030	0.0229	0.8939	922.5211
120 000	128 000	756	0.0188	0.9218	0.0186	0.9125	749.9717
128 000	136 000	616	0.0153	0.9371	0.0152	0.9277	610.5560
136 000	144 000	520	0.0129	0.9501	0.0124	0.9401	498.0050
144 000	152 000	430	0.0107	0.9607	0.0101	0.9502	407.1156
152 000	160 000	294	0.0073	0.9681	0.0083	0.9585	333.6397
160 000	168 000	248	0.0062	0.9742	0.0068	0.9653	274.1440
168 000	176 000	180	0.0045	0.9787	0.0056	0.9709	225.8710
176 000	184 000	135	0.0034	0.9821	0.0046	0.9755	186.6139
184 000	192 000	123	0.0031	0.9851	0.0038	0.9794	154.6097
192 000	200 000	106	0.0026	0.9877	0.0032	0.9826	128.4505
200 000	208 000	72	0.0018	0.9895	0.0027	0.9852	107.0116
208 000	216 000	64	0.0016	0.9911	0.0022	0.9875	89.3936
216 000	224 000	59	0.0015	0.9926	0.0019	0.9893	74.8762
224 000	232 000	44	0.0011	0.9937	0.0016	0.9909	62.8811
232 000	240 000	31	0.0008	0.9945	0.0013	0.9922	52.9434
240 000	248 000	33	0.0008	0.9953	0.0011	0.9933	44.6882
248 000	256 000	25	0.0006	0.9959	0.0009	0.9942	37.8128
256 000	264 000	30	0.0007	0.9966	0.0008	0.9950	32.0718
264 000	272 000	18	0.0004	0.9971	0.0007	0.9957	27.2658
272 000	280 000	18	0.0004	0.9975	0.0006	0.9963	23.2327
280 000	288 000	11	0.0003	0.9978	0.0005	0.9968	19.8400
288 000	296 000	13	0.0003	0.9981	0.0004	0.9972	16.9793
296 000	310 000	14	0.0003	0.9985	0.0006	0.9978	24.1208
310 000	325 000	12	0.0003	0.9988	0.0005	0.9983	19.6978
325 000	350 000	14	0.0003	0.9991	0.0006	0.9989	22.9260
350 000	375 000	14	0.0003	0.9995	0.0004	0.9992	14.7538
375 000	418 000	11	0.0003	0.9998	0.0004	0.9996	14.5153
418 000	547 931	10	0.0002	1.0000	0.0003	0.9999	13.1832

$$\chi^2 = 480.0981 \quad \text{und} \quad KS = 0.0241$$

Tabelle C.2: Anpassung der verallgemeinerten Lognormalverteilung mit $\hat{\theta}_1 = 10.9568$, $\hat{\theta}_2 = 0.5752$ und $\hat{r} = 1.8487$ (Momentenmethode) an die EVS-Daten

x_u	x_o	n_j	f_j	F_j	$f_j^\star$	$F_j^\star$	$n_j^\star$
1 706	8 000	19	0.0005	0.0005	0.0007	0.0007	27.4491
8 000	16 000	858	0.0213	0.0218	0.0162	0.0168	649.7355
16 000	24 000	2402	0.0597	0.0815	0.0534	0.0703	2149.0265
24 000	32 000	3307	0.0822	0.1637	0.0883	0.1585	3550.5645
32 000	40 000	3925	0.0976	0.2613	0.1075	0.2661	4326.1703
40 000	48 000	4019	0.0999	0.3612	0.1118	0.3778	4495.3150
48 000	56 000	3972	0.0987	0.4600	0.1056	0.4834	4246.0656
56 000	64 000	3786	0.0941	0.5541	0.0930	0.5764	3742.6516
64 000	72 000	3302	0.0821	0.6362	0.0780	0.6545	3139.5363
72 000	80 000	2771	0.0689	0.7050	0.0640	0.7185	2575.6267
80 000	88 000	2306	0.0573	0.7624	0.0520	0.7705	2090.3785
88 000	96 000	1935	0.0481	0.8105	0.0420	0.8124	1688.2504
96 000	104 000	1540	0.0383	0.8488	0.0338	0.8463	1361.4457
104 000	112 000	1204	0.0299	0.8787	0.0273	0.8736	1098.5488
112 000	120 000	979	0.0243	0.9030	0.0221	0.8957	888.0910
120 000	128 000	756	0.0188	0.9218	0.0179	0.9136	719.8920
128 000	136 000	616	0.0153	0.9371	0.0146	0.9281	585.4188
136 000	144 000	520	0.0129	0.9501	0.0119	0.9400	477.7323
144 000	152 000	430	0.0107	0.9607	0.0097	0.9497	391.2835
152 000	160 000	294	0.0073	0.9681	0.0080	0.9577	321.6755
160 000	168 000	248	0.0062	0.9742	0.0066	0.9643	265.4409
168 000	176 000	180	0.0045	0.9787	0.0055	0.9698	219.8501
176 000	184 000	135	0.0034	0.9821	0.0045	0.9743	182.7546
184 000	192 000	123	0.0031	0.9851	0.0038	0.9781	152.4607
192 000	200 000	106	0.0026	0.9877	0.0032	0.9813	127.6310
200 000	208 000	72	0.0018	0.9895	0.0027	0.9839	107.2063
208 000	216 000	64	0.0016	0.9911	0.0022	0.9862	90.3454
216 000	224 000	59	0.0015	0.9926	0.0019	0.9881	76.3781
224 000	232 000	44	0.0011	0.9937	0.0016	0.9897	64.7685
232 000	240 000	31	0.0008	0.9945	0.0014	0.9911	55.0868
240 000	248 000	33	0.0008	0.9953	0.0012	0.9922	46.9869
248 000	256 000	25	0.0006	0.9959	0.0010	0.9932	40.1891
256 000	264 000	30	0.0007	0.9966	0.0009	0.9941	34.4670
264 000	272 000	18	0.0004	0.9971	0.0007	0.9948	29.6362
272 000	280 000	18	0.0004	0.9975	0.0006	0.9955	25.5463
280 000	288 000	11	0.0003	0.9978	0.0005	0.9960	22.0742
288 000	296 000	13	0.0003	0.9981	0.0005	0.9965	19.1186
296 000	310 000	14	0.0003	0.9985	0.0007	0.9972	27.6096
310 000	325 000	12	0.0003	0.9988	0.0006	0.9977	23.0570
325 000	350 000	14	0.0003	0.9991	0.0007	0.9984	27.6717
350 000	375 000	14	0.0003	0.9995	0.0005	0.9989	18.5384
375 000	418 000	11	0.0003	0.9998	0.0005	0.9994	19.2306
418 000	547 931	10	0.0002	1.0000	0.0005	0.9999	19.6053

$$\chi^2 = 482.9417 \quad \text{und} \quad KS = 0.0234$$

Tabelle C.3: Anpassung der verallgemeinerten Lognormalverteilung mit $\hat{\theta}_1 = 10.9589$, $\hat{\theta}_2 = 0.5839$ und $\hat{r} = 1.9266$ (Maximum-Likelihood-Methode) an die EVS-Daten

x_u	x_o	n_j	f_j	F_j	$f_j^\star$	$F_j^\star$	$n_j^\star$
1 706	8 000	19	0.0005	0.0005	0.0005	0.0005	21.6230
8 000	16 000	858	0.0213	0.0218	0.0155	0.0160	621.6848
16 000	24 000	2402	0.0597	0.0815	0.0539	0.0699	2169.2776
24 000	32 000	3307	0.0822	0.1637	0.0896	0.1595	3605.0703
32 000	40 000	3925	0.0976	0.2613	0.1081	0.2677	4350.2296
40 000	48 000	4019	0.0999	0.3612	0.1109	0.3786	4461.7002
48 000	56 000	3972	0.0987	0.4600	0.1037	0.4823	4169.6926
56 000	64 000	3786	0.0941	0.5541	0.0912	0.5735	3669.0552
64 000	72 000	3302	0.0821	0.6362	0.0771	0.6506	3102.2954
72 000	80 000	2771	0.0689	0.7050	0.0638	0.7144	2568.1986
80 000	88 000	2306	0.0573	0.7624	0.0522	0.7667	2101.4128
88 000	96 000	1935	0.0481	0.8105	0.0425	0.8092	1708.7476
96 000	104 000	1540	0.0383	0.8488	0.0344	0.8436	1385.4313
104 000	112 000	1204	0.0299	0.8787	0.0279	0.8715	1122.4589
112 000	120 000	979	0.0243	0.9030	0.0226	0.8941	910.0190
120 000	128 000	756	0.0188	0.9218	0.0184	0.9125	738.9818
128 000	136 000	616	0.0153	0.9371	0.0150	0.9274	601.4388
136 000	144 000	520	0.0129	0.9501	0.0122	0.9396	490.7962
144 000	152 000	430	0.0107	0.9607	0.0100	0.9496	401.6767
152 000	160 000	294	0.0073	0.9681	0.0082	0.9578	329.7512
160 000	168 000	248	0.0062	0.9742	0.0068	0.9646	271.5611
168 000	176 000	180	0.0045	0.9787	0.0056	0.9702	224.3546
176 000	184 000	135	0.0034	0.9821	0.0046	0.9748	185.9462
184 000	192 000	123	0.0031	0.9851	0.0038	0.9786	154.6012
192 000	200 000	106	0.0026	0.9877	0.0032	0.9818	128.9410
200 000	208 000	72	0.0018	0.9895	0.0027	0.9845	107.8689
208 000	216 000	64	0.0016	0.9911	0.0023	0.9868	90.5107
216 000	224 000	59	0.0015	0.9926	0.0019	0.9887	76.1676
224 000	232 000	44	0.0011	0.9937	0.0016	0.9902	64.2798
232 000	240 000	31	0.0008	0.9945	0.0014	0.9916	54.3975
240 000	248 000	33	0.0008	0.9953	0.0011	0.9927	46.1583
248 000	256 000	25	0.0006	0.9959	0.0010	0.9937	39.2694
256 000	264 000	30	0.0007	0.9966	0.0008	0.9946	33.4933
264 000	272 000	18	0.0004	0.9971	0.0007	0.9953	28.6371
272 000	280 000	18	0.0004	0.9975	0.0006	0.9959	24.5435
280 000	288 000	11	0.0003	0.9978	0.0005	0.9964	21.0838
288 000	296 000	13	0.0003	0.9981	0.0005	0.9969	18.1525
296 000	310 000	14	0.0003	0.9985	0.0006	0.9975	26.0011
310 000	325 000	12	0.0003	0.9988	0.0005	0.9980	21.4734
325 000	350 000	14	0.0003	0.9991	0.0006	0.9987	25.3808
350 000	375 000	14	0.0003	0.9995	0.0004	0.9991	16.6671
375 000	418 000	11	0.0003	0.9998	0.0004	0.9995	16.8398
418 000	547 931	10	0.0002	1.0000	0.0004	0.9999	16.2052

$$\chi^2 = 470.1155 \quad \text{und} \quad KS = 0.0223$$

Anhang D

Verwendete SAS-Programme

Es folgt eine Auswahl der SAS-Programme, die im Rahmen dieser Diplomarbeit geschrieben wurden. Die entscheidenden Stellen sind mit Erläuterungen versehen, die genaue Syntaxbeschreibung findet sich im Hilfeprogramm der Software (vgl. SAS Institute Inc., 1999). Auf die Programme zur Erzeugung der Graphiken wird verzichtet. Ein Beispiel für die Tangentenregel (3.19), S. 22, die bei der Verteilungsfunktion und den Lorenzkurven zum Einsatz kommt, ist im folgenden ersten Programm enthalten. Außerdem sind die vier Programme aufgeführt, die im Zusammenhang mit den EVS-Daten verwendet werden.

Tafel der verallgemeinerten Standardnormalverteilung

```
data a; m=2000; r=3;        *2000 Teilintervalle, Parameter r=3;

*Erzeugung der einzelnen Funktionswerte der Teilintervalle.
 Insgesamt werden Werte im Intervall von 0.01 bis 5 betrachtet;
do u=0.01 to 5 by 0.01;
   h=u/m;
   do x=0 to u by h;
      b=sqrt(gamma(3/r)/gamma(1/r));
      y=b/(2*gamma(1+1/r))*exp(-(x*b)**r);
   output; end;
output; end; run; quit;

proc iml;
use work.a; read var{y} into y all; read var{m} into m;
read var{h} into h1 all; read var{u} into u all;

punkt=j(501,1,0); z=j(m+2,500,0); h=j(500,1,0);

do j=1 to 500;
   do i=2 to m by 2;      *Nur jeder zweite Wert wird benoetigt;
      z[i,j]=y[i+2002*(j-1)];
   end;
   punkt[j+1]=u[1+2002*(j-1)];
   h[j]=h1[1+2002*(j-1)];
end;

*Tangentenregel. Es wird nur die positive Haelfte des Traegers
 betrachtet, daher 0.5 + ...;
tangente=j(501,1,0.5);
do i=2 to 501;
   tangente[i]=0.5 + 2*h[i-1]*z[+,i-1];
end;
```

```
*Ausgabeform der Matrix;
matrix1=j(40,10,.); matrix2=j(10,10,.);
do i= 1 to 400;
   matrix1[i]=tangente[i];
end;
do i=1 to 100;
   matrix2[i]=tangente[400+i];
end;

tafel1=char(matrix1,7,6); tafel2=char(matrix2,11,10);
r=do(0,3.9,0.1); r1=char(r,4,2);
rb=do(4,4.9,0.1); r2=char(rb,4,2);
c1=do(0,0.09,0.01); c=char(c1,3,2);

print tafel1 [colname=c rowname=r1];
print tafel2 [colname=c rowname=r2];
quit;
```

Regula falsi und Momentenschätzer

```
*Dateneingabe der EVS-Datei und Logarithmierung;
data regula;
infile 'd:\...\Evs.txt' firstobs=2 dlm='09'x;
input a b @@;
if b<=0 then delete; x=log(b);

proc iml; use work.regula; read var{x} into x all; n=nrow(x);

*(Anpassung einer einfachen Lognormal-Verteilung);
/*r=2;
xquer=1/n*x[+];
t1dach=xquer;
t2dach=(1/n*sum(abs(x-t1dach)##r))**(1/r);
print t1dach t2dach;*/
```

```
*Die Regula falsi (mit den Startwerten 1 und 3) laeuft so lange,
 bis sich der Wert "delta" nur noch geringfuegig aendert;
r={1 3};
xquer=1/n*x[+];
delta=5;

do while (delta>0.000001);
   y=j(n,2,.); y2=j(n,2,.); f=j(2,1,.);
   do i=1 to 2;
      y[,i]=abs(x-xquer)##r[i];
      y2[,i]=abs(x-xquer)##(2*r[i]);
   end;
   mu=1/n*y[+,];
   mu2=1/n*y2[+,];
   do i=1 to 2;
      f[i]=mu2[i]-(r[i]+1)*mu[i]**2;
   end;

   rneu=r[2]-f[2]*(r[2]-r[1])/(f[2]-f[1]);
   delta=(r[2]-r[1])/(f[2]-f[1]);

   r[1]=r[2];
   r[2]=rneu;
end;

t1dach=xquer;
t2dach=(1/n*sum(abs(x-t1dach)##r[1]))**(1/r[1]);
rdach=r[1];

print t1dach t2dach rdach;
run; quit;
```

Maximum-Likelihood-Schätzer

```
data ml;
infile 'd:\...\Evs.txt' firstobs=2 dlm='09'x;
input a b @@;
if b<=0 then delete; x=log(b);

*Maximum-Likelihood-Prozedur fuer alle Parameter gleichzeitig;
proc nlp data=ml nomiss instep=1e-300;
max loglike;
decvar  t1 t2 r;
bounds r>=1 , t2>0;

*Log-Likelihood-Funktion;
loglike=-log(2)-log(r)/r-lgamma(1+1/r)-log(t2)-x-1/r*(abs(x-t1)/t2)**r;
run; quit;
```

χ^2- und Kolmogorov-Smirnov-Test

```
data chi;
infile 'd:\...\Evs.txt' firstobs=2 dlm='09'x;
input a b @@;
if b<=1000 then delete;

*Klassenbildung, "x1" ist untere Grenze;
do i=0 to 36;
   if i*8000<=b<(i+1)*8000 then x1=i*8000;
   if 296000<=b<310000 then x1=296000;
   if 310000<=b<325000 then x1=310000;
   if 325000<=b<350000 then x1=325000;
   if 350000<=b<375000 then x1=350000;
   if 375000<=b<418000 then x1=375000;
   if 418000<=b then x1=418000;
end;
```

```
*Erzeugen der empirischen Klassenhaeufigkeiten;
ods output OneWayFreqs=data1;
proc freq data=chi;
tables x1 / nofreq nocum;
run;
ods output close;

proc iml;
use work.data1; read var{x1} into x all;
read var{percent} into percent all;
x1=num(x); x1[1]=1706; emp=percent/100;

*Berechnung der Anpassungsguete fuer Maximum-Likelihood-Schaetzer;
t1=10.958949; t2=0.583907; r=1.926612;

*"x2" ist obere Klassengrenze;
x2=j(43,1,.);
x2[38]=310000; x2[39]=325000; x2[40]=350000;
x2[41]=375000; x2[42]=418000; x2[43]=547931;
do i=1 to 37; x2[i]=i*8000; end;

*Transformierte Klassengrenzen;
y1=j(43,1,.); y2=j(43,1,.);
do i=1 to 43;
   y1[i]=(log(x1[i])-t1)/t2; y2[i]=(log(x2[i])-t1)/t2;
end;

*Berechnung der theoretischen relativen Klassenhaeufigkeiten mit
 Fallunterscheidung;
matrix=j(43,150,.);
do i=1 to 43;
   if y1[i]<0 then do;
      if y2[i]<0 then do j=0 to 149;
         matrix[i,j+1]=(-1)**j/(gamma(j+1)*r**j*(1+r*j))
                       *(abs(y1[i])**(r*j+1)-abs(y2[i])**(r*j+1));
      end;
```

```
      else do j=0 to 149;
         matrix[i,j+1]=(-1)**j/(gamma(j+1)*r**j*(1+r*j))
                       *(y2[i]**(r*j+1)+abs(y1[i])**(r*j+1));
      end; end;
   if y1[i]>0 then do j=0 to 149;
      matrix[i,j+1]=(-1)**j/(gamma(j+1)*r**j*(1+r*j))
                   *(y2[i]**(r*j+1)-y1[i]**(r*j+1));
   end; end;
p=j(43,1,.);
do i=1 to 43;
p[i]=1/(2*r**(1/r)*gamma(1+1/r))*matrix[i,+];
end;

*"freqemp", "emp" und "vertemp" sind die empirischen absoluten
 und relativen Haeufigkeiten sowie die empirische Verteilungs-
 funktion, "freq", "p" und "vert" analog theoretisch;
freqemp=emp*40226; freq=p*40226;
vertemp=j(43,1,.); vert=j(43,1,.);
do i=1 to 43;
   vertemp[i]=sum(emp[1:i]); vert[i]=sum(p[1:i]);
end;

*(Rundung der Nachkommastellen fuer Tabellenausgabe);
/*emp1=char(emp,6,4); vertemp1=char(vertemp,6,4); p1=char(p,6,4);
vert1=char(vert,6,4); freq1=char(freq,9,4);
print x1 x2 freqemp emp1 vertemp1 p1 vert1 freq1;*/

*Chi2- und Kolmogorov-Smirnov-Teststatistiken;
chi=j(43,1,.); ks1=j(43,1,.);
do i=1 to 43;
   chi[i]=(freqemp[i]-freq[i])**2/freq[i];
   ks1[i]=abs(vertemp[i]-vert[i]);
end;
chi2=chi[+]; ks=max(ks1);
print chi2 ks;
run; quit;
```

Likelihood-Quotienten- und Score-Test

```
data test;
infile 'd:\...\Evs.txt' firstobs=2 dlm='09'x;
input a b @@;
if b<=0 then delete; x=log(b);

proc iml;
use work.test; read var{x} into x all;
t1=10.9568; t2=0.592; r=2; n=nrow(x);
gt1=j(n,1,.); gt2=j(n,1,.); gr=j(n,1,.); u=j(n,1,.);

*Berechnung des Score-Vektors "S" aus den Daten und den ersten
 partiellen Ableitungen: Gradient=(gt1,gt2,gr)';
do i=1 to n;
   u[i]=abs(x[i]-t1)/t2;
   gt2[i]=-1/t2+1/t2*u[i]**r;
   gr[i]=log(r)/(r**2)-1/(r**2)+1/(r**2)*digamma(1+1/r)
         +1/(r**2)*u[i]**r-1/r*u[i]**r*log(u[i]);
   if x[i]-t1>0 then do;
      u[i]=(x[i]-t1)/t2;
      gt1[i]=1/t2*u[i]**(r-1);
   end;
   else do;
      u[i]=(t1-x[i])/t2;
      gt1[i]=-1/t2*u[i]**(r-1);
   end; end;
S=j(3,1,.); S[1]=gt1[+]; S[2]=gt2[+]; S[3]=gr[+];

*Parameter und Faktoren c fuer einfache und verallgemeinerte
 Lognormal-Verteilung;
t1=10.9568; t2=0.592; r=2;
t12=10.9589; t22=0.5839; r2=1.9266;
c1=1/(2*r**(1/r)*gamma(1+1/r));
c2=1/(2*r2**(1/r2)*gamma(1+1/r2));
```

```
*Likelihood-Quotienten-Test;
log1=j(n,1,.); log2=j(n,1,.);
do i=1 to n;
   log1[i]=log(c1)-log(t2)-1/r*(abs(x[i]-t1)/t2)**r;
   log2[i]=log(c2)-log(t22)-1/r2*(abs(x[i]-t12)/t22)**r2;
end;
lg1=log1[+]; lg2=log2[+];
lr=-2*(lg1-lg2);
print lg1 lg2 lr;

*Informationsmatrix;
I=j(3,3,.);
I[1,1]=n*(r-1)/(t2**2*r**(2/r))*gamma(1-1/r)/gamma(1+1/r);
I[2,2]=n*r/(t2**2);
I[3,3]=n/(r**3)*(-1+(1+1/r)*trigamma(1+1/r)
                 +(log(r)+digamma(1+1/r))**2);
I[1,2]=0;I[2,1]=0;I[1,3]=0;I[3,1]=0;
I[2,3]=-n/(t2*r)*(log(r)+digamma(1+1/r));
I[3,2]=-n/(t2*r)*(log(r)+digamma(1+1/r));

*Score-Teststatistik fuer zusammengesetzte Hypothese;
s2=S[3]//S[1]//S[2];
I11=I[3,3];
I12=I[3,1]||I[3,2];
I22=(I[1,1]||I[1,2])//(I[1,2]||I[2,2]);
I112=I11-I12*inv(I22)*I12';

score112=S[3]**2/I112;
print I112 score112;
run; quit;
```

Ehrenwörtliche Erklärung

Hiermit erkläre ich, dass ich diese Arbeit selbstständig verfasst und keine anderen als die angegebenen Hilfsmittel und Quellen verwendet habe.

Dortmund, 27. November 2001 Stefanie Scheid